VOLATILIDAD DE INDICES ACCIONARIOS: EL CASO DEL IPSA*

RODRIGO A. ALFARO

Banco Central de Chile

CARMEN GLORIA SILVA

Banco Central de Chile

This paper reviews the traditional ways to measure volatility which are based only on closing prices, and introduces alternative measurements that use additional information of prices during the day: opening, minimum, maximum, and closing prices. Using the binomial model, we prove that alternative measurements are more efficient than the traditional ones. An empirical application is performed using daily data of the chilean stock market index IPSA. From the theoretical and empirical results we propose an unbiased and efficient measure of daily volatility for this financial market.

JEL: C22, G11, G12

Keywords: Volatilidad, Modelo Binomial, GARCH, VIX, Sesgo y Eficiencia.

1. INTRODUCCIÓN

Las recientes turbulencias en los mercados internacionales se han manifestado en perturbaciones del mercado local. Estas últimas se han visto reflejadas en mayores movimientos de los precios de activos, fenómeno que se describe como un incremento de la volatilidad de los mercados financieros.

Tanto para los participantes del mercado como para los reguladores es fundamental poseer y entender indicadores de volatilidad de variables financieras. En este trabajo revisamos un conjunto de medidas de volatilidad aplicadas a índices accionarios. Según la información disponible definimos como medidas tradicionales de volatilidad a aquellas que están basadas en precios de cierre de los activos, mientras que agrupamos en medidas alternativas a todas aquellas que

* Agradecemos los comentarios de Kevin Cowan, Pablo García, José Manuel Garrido, Felipe Jaque, Camilo Vio y un árbitro anónimo.

Email: ralfaro@bcentral.cl, csilva@bcentral.cl

utilizan más información del precio del activo, ya sea con información dentro del día (mínimo, máximo y apertura) o con información de productos derivados del activo (opciones).

En las siguientes secciones presentamos algunas medidas de volatilidad –tradicionales, intradiarias y basadas en opciones– mientras que en la sección 5, utilizando datos diarios del IPSA, corroboramos la evidencia teórica y empírica mencionada en la revisión de la literatura. Luego, compararemos la volatilidad realizada con la implícita en la sección 6. Nuestra principal conclusión es que en períodos de alta turbulencia las variables financieras se desacoplan de sus parámetros históricos, por lo que sólo la información más reciente es relevante. Basados en esto, proponemos un índice de volatilidad para el IPSA que explota el uso de datos dentro del día y que es sencillo calcular.

2. MEDIDAS TRADICIONALES DE VOLATILIDAD

La medida estándar para medir volatilidad corresponde a la ventana de desviaciones estándar (DE). En general, ésta se calcula utilizando un número fijo de las más recientes observaciones de retorno del activo y su fórmula para el periodo t es:

$$(1) \quad \sigma_{DE,t} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{t-i} - \bar{r}_t)^2}, \text{ con } \bar{r}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{t-i}$$

donde r_{t-i} corresponde al retorno logarítmico del activo calculado con los precios de cierre, $\bar{r}_t$ es el retorno promedio durante el período (generalmente muy cercano a cero) y n es el largo de la ventana. Esta medida de volatilidad es eficiente si el retorno logarítmico es homoscedástico y sigue una distribución normal.

Engle (2001) considera a DE como el primer modelo ARCH, pero postula dos críticas. Primero, cada observación dentro de la ventana tiene el mismo ponderador, ignorando que observaciones más recientes podrían ser más relevantes y por ende deberían tener un ponderador mayor y, segundo, las observaciones anteriores a la ventana tienen un ponderador de cero y si bien su relevancia es menor, podrían ser importantes.

Ambas críticas pueden controlarse ponderando las observaciones exponencialmente como lo sugiere RiskMetrics (J.P. Morgan). Como en la práctica el retorno promedio es cercano a cero, y tomando un ponderador λ menor que 1, se obtiene la siguiente medida de volatilidad (Willmot, 2006):

$$(2) \quad \sigma_{RM,t} = \sqrt{\lambda \sigma_{RM,t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2}$$

donde se recomienda utilizar $\lambda = 0,94$, ajuste basado en series con datos diarios para Estados Unidos.

Teorema 1¹: *Suponiendo retornos independientes y homocedásticos que siguen una distribución normal, entonces $E(\sigma_{DE,t}^2) = E(\sigma_{RM,t}^2) = \sigma^2$, y la correlación entre estas medidas es:*

$$(3) \quad \text{Corr}(\sigma_{DE,t}^2, \sigma_{RM,t}^2) = (1 - \lambda^n) \sqrt{\frac{(1 + \lambda)}{n(1 - \lambda)}}$$

Por ejemplo, para el caso de $\lambda = 0,82$, la correlación se maximiza con una ventana de seis días, mientras que para $\lambda = 0,94$ la ventana debe ser de veinte días (un mes).

Generalizaciones de los parámetros λ y $\bar{r}_t$ pueden encontrarse en los modelos de Engle (1982) y Bollerslev (1986) resumidos en el siguiente sistema:

$$(4) \quad \begin{aligned} r_t &= \mu + \sigma_t e_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha(r_{t-1} - \mu)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

donde el componente e_t se distribuye normal estándar. El sistema representa un modelo GARCH(1,1) que ha resultado exitoso en la caracterización de series financieras con datos diarios². Los parámetros se encuentran restringidos a las siguientes condiciones: $\omega, \alpha, \beta > 0$, para asegurar varianza positiva y $\alpha + \beta < 1$ para asegurar un GARCH estable. De lo contrario si $\alpha + \beta = 1$, entonces $\omega = 0$ y estamos en presencia de un GARCH Integrado (IGARCH).

Notemos que RiskMetrics es un IGARCH(1,1) cuando $\mu = 0$ (cero retorno) y $\beta = \lambda$.

3. MEDIDAS INTRADIARIAS

Las medidas de volatilidad presentadas anteriormente utilizan sólo precios de cierre de los activos, excluyendo información relevante que se genera dentro del día. En esta sección incorporamos dentro del análisis el uso de precios de apertura, cierre, máximo y mínimo. Este conjunto de información ha sido anteriormente explotado por Parkinson (1980), Garman y Klass (1980) y Rogers y Satchell (1991).

Sin embargo, dichos autores han basado sus estudios en el supuesto que el precio del activo sigue un movimiento browniano, el cual es razonable para mercados desarrollados que presentan un elevado número de transacciones dentro de un día. Para el caso de mercados locales, proponemos utilizar el modelo bi-

¹ Para una prueba del mismo véase Alfaro y Silva (2008).

² Véase por ejemplo Lumsdaine (1995), Hansen y Lunde (2001) y Hwang y Pereira (2003).

nomial, desarrollado por Cox, Ross y Rubinstein (1979), para la caracterización del precio de un activo.

En este modelo, el precio del activo en el próximo período puede ubicarse en dos escenarios posibles, los cuales están determinados en función de su volatilidad (σ):

- Escenario al alza: el precio del activo se incrementa por el siguiente ponderador $u = \exp\left(\sigma\sqrt{1/N}\right)$ y
- Escenario a la baja: el precio del activo se reduce por $d = 1/u$.

Donde N corresponde al número de pasos del árbol binomial. Es importante notar que cuando N tiende a infinito el modelo binomial converge al modelo de tiempo continuo representado por los movimientos brownianos. Por esta razón, el número de pasos del modelo binomial representa la “profundidad” del mercado financiero en análisis, siendo un modelo más adecuado —que el de tiempo continuo— para el caso de Chile.

La probabilidad de ocurrencia de cada escenario es función de la volatilidad y del retorno del activo. La probabilidad del escenario al alza (Wilmott, 2006) corresponde a:

$$(5) \quad p = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma} \sqrt{\frac{1}{N}}$$

Para simplificar la exposición, asumiremos que el activo tiene un retorno igual a cero, en cuyo caso la probabilidad de ocurrencia de cada escenario es 0,5.

Consideremos que los precios de apertura, máximo, mínimo y cierres dentro de un día, para los cuales las siguientes definiciones son aplicadas: o es el logaritmo del precio de apertura, que por simplicidad asumimos igual a uno; c es el logaritmo del precio de cierre, h el logaritmo del precio máximo y l el logaritmo del precio mínimo. Basados en esta información las siguientes medidas de volatilidad pueden ser calculadas: $\sigma_{CC}^2 \equiv (c - o)^2$ y $\sigma_{HL}^2 \equiv (h - l)^2$, donde CC es la medida tradicional de volatilidad en base a precios de cierre y HL es un nuevo estimador que utiliza precios máximos y mínimos observados en el transcurso del día, siguiendo lo sugerido por Parkinson (1980).

Para el caso de un árbol binomial con un paso ($N=1$), los valores de c , h y l en los escenarios al alza y a la baja son presentados en el Cuadro 1.

Se debe notar que los resultados se presentan para el logaritmo de los precios. Por ejemplo, el precio de cierre en el escenario al alza es: $c = \log(u) = \sigma\sqrt{1/1} = \sigma$, que a su vez coincide con el precio máximo, mientras que el precio mínimo corresponde al logaritmo del precio de apertura, el cual ha sido normalizado.

CUADRO 1
RESULTADOS PARA UN MODELO DE UN PASO

Escenarios	c	h	l
Alza	σ	σ	0
Baja	$-\sigma$	0	$-\sigma$

Fuente: Elaboración propia.

Los valores esperados de CC y HL pueden ser computados como sigue:

$$(6) \quad E(\sigma_{CC}^2) = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}(-\sigma)^2 = \sigma^2 \quad y \quad E(\sigma_{HL}^2) = \frac{1}{2}(\sigma - 0)^2 + \frac{1}{2}(0 + \sigma)^2 = \sigma^2$$

No es de extrañar que los valores esperados de CC y HL sean iguales por cuanto ambos indicadores usan la misma información, debido a que en este modelo de un paso si el escenario es al alza, entonces $h = c$ y $l = o$, mientras que si el escenario es a la baja, tenemos que $h = o$ y $l = c$.

Al agregar nueva información, los indicadores CC y HL podrían diferir en el uso que le dan a ésta. Para ejemplificar lo anterior, consideraremos en el Cuadro 2 el caso de un árbol binomial con dos pasos ($N = 2$). Allí notamos que solo los escenarios Alza-Alza y Baja-Baja entregan información a la medida CC , mientras que la medida HL utiliza todos los escenarios para derivar un estimador de la volatilidad del activo.

CUADRO 2
RESULTADOS PARA UN MODELO CON DOS PASOS

Escenarios	c	h	l
Alza-Alza	$\sigma\sqrt{2}$	$\sigma\sqrt{2}$	0
Alza-Baja	0	$\sigma\sqrt{2}/2$	0
Baja-Alza	0	0	$-\sigma\sqrt{2}/2$
Baja-Baja	$-\sigma\sqrt{2}$	0	$-\sigma\sqrt{2}$

Fuente: Elaboración propia.

Los valores esperados de CC y HL pueden ser calculados como sigue:

$$(7) \quad E(\sigma_{CC}^2) = \frac{1}{4}(\sigma\sqrt{2})^2 + \frac{1}{4}(-\sigma\sqrt{2})^2 = \sigma^2$$

$$E(\sigma_{HL}^2) = \frac{1}{4}(\sigma\sqrt{2} - 0)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + \frac{1}{4}\left(0 + \frac{\sigma\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(0 + \sigma\sqrt{2})^2 = 1,25\sigma^2$$

Observamos que al aumentar el número de pasos solo *CC* resulta insesgado, mientras que *HL* sobrestima el verdadero valor de la varianza en 0,25 veces. El sesgo se produce porque estamos calculando la varianza con datos discretos de precios máximos y mínimos, usando solo dos pasos, en circunstancias que la derivación de este estimador depende fuertemente del supuesto de monitoreo de un significativo número de escenarios de precios.

Parkinson (1980) demostró que cuando el precio del activo sigue un proceso browniano sin tendencia y el analista puede monitorearlo continuamente, entonces $E(\sigma_{HL}^2) = 4 \log(2)\sigma^2 \approx 2,773\sigma^2$. Esto indica que la medida *HL* sobrestima la verdadera varianza, siendo el sesgo condicional a la “profundidad” del mercado financiero.

No obstante, el sesgo *HL* es más eficiente que *CC* en términos de Error Cuadrático Medio (ECM). En particular, para $N = 2$, las fórmulas presentadas en el Apéndice de este artículo nos permiten mostrar que $ECM(\sigma_{CC}^2) = \sigma^4$ y $ECM(\sigma_{HL}^2) = 0,625\sigma^4$.

Intuitivamente, esto puede ser explicado porque los precios máximos y mínimos contienen más información sobre la volatilidad que los precios de apertura y cierre, debido a que capturan sus valores durante el intervalo de transacciones, en cambio, los precios de apertura y cierre son meramente fotos instantáneas del proceso.

Definamos a_N como el factor de sesgo de *HL*. De este modo para $N = 2$ tenemos que $a_N = 1,25$. Con ello, un estimador insesgado (*HL2*), puede ser generado a partir de *HL* como sigue:

$$(8) \quad \sigma_{HL2}^2 \equiv \frac{1}{a_N} \sigma_{HL}^2 = 0,8\sigma_{HL}^2 \rightarrow E(\sigma_{HL2}^2) = \sigma^2 \text{ y } ECM(\sigma_{HL2}^2) = 0,36\sigma^4$$

Así, este nuevo estimador *HL2* es insesgado como *CC*, pero tiene menor varianza. Otro estimador insesgado y eficiente fue propuesto por Garman y Klass (1980), cuya adaptación para el caso binomial es como sigue:

$$(9) \quad \sigma_{GK}^2 = \frac{1}{2}(h-l)^2 - \left(\frac{a_N}{2} - 1\right)(c-o)^2$$

Por construcción *GK* es insesgado, y para el caso de $N = 2$, tenemos que $ECM(\sigma_{GK}^2) = 0,5625\sigma^4$. Sin embargo, resulta ser más eficiente que *HL* cuando $N > 12$, como se desprende de la Tabla 3.

Los resultados anteriores pueden inducir erróneamente volatilidad si es que el precio del activo presenta tendencia durante el día, es decir si $\mu \neq 0$. Por ejemplo, si el activo va al alza, entonces $h = c$ y $l = o$, luego *HL* y *HL2* computarían varianzas espurias en circunstancias que el activo presenta una tendencia alcista. Una forma de controlar por el efecto tendencia es incorporar el precio de apertura y cierre del activo en la medida de varianza, como lo proponen para el caso continuo Rogers y Satchell (1991):

$$(10) \quad \sigma_{RS}^2 = (h - o)(h - c) + (l - o)(l - c)$$

Esta medida, además de usar precios máximos y mínimos, resta la evolución del precio del activo al incorporar el precio inicial y de cierre. Nuevamente, considerando los escenarios para un árbol binomial de dos pasos, las estadísticas para RS son:

$$(11) \quad E(\sigma_{RS}^2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{-\sigma\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 0,25\sigma^2 \quad y$$

$$ECM(\sigma_{RS}^2) = 0,625\sigma^4$$

Es decir, RS al igual que HL es sesgado. Definiendo a b_N como el factor de sesgo para RS, es posible construir un estimador insesgado de RS (RS2) como sigue:

$$(12) \quad \sigma_{RS2}^2 = \frac{1}{0,25} \sigma_{RS}^2 = 4\sigma_{RS}^2 \rightarrow E(\sigma_{RS2}^2) = \sigma^2 \quad y \quad ECM(\sigma_{RS2}^2) = \sigma^4$$

Nótese que RS2 tiene las mismas propiedades que CC, cuando el precio del activo puede ser caracterizado por un árbol binomial de dos pasos. Sin embargo, RS2 no está afectado por tendencia. En el artículo original, Rogers y Satchell (1991) demuestran que para el caso continuo RS es insesgado.

Hasta ahora hemos presentado las estimaciones del sesgo y su correspondiente factor de corrección de las medidas HL y RS para el caso de un modelo con uno y dos pasos, cuando el activo no presenta marcado retorno. El análisis extendido del modelo binomial para un mayor número de pasos se presenta en la Tabla 3³.

En general, las ventajas del clásico estimador de volatilidad CC son su simplicidad y que está libre de sesgo, sin embargo, su principal desventaja es el hecho que ignora información disponible, la cual puede contribuir a la eficiencia del estimador, debido a que es posible que incluso leves aportes a la información utilizada tengan un impacto relevante. En este sentido, Garman y Klass (1980) señalan que el clásico estimador CC sería un *benchmark* por el cual se medirían otros estimadores, siendo posible construir una razón de Eficiencia Relativa (ER) de la siguiente forma:

$$(13) \quad ER(\sigma_A^2) = \frac{Var(\sigma_{CC}^2)}{Var(\sigma_A^2)}$$

³ Cabe destacar que las medidas CC y GK son insesgadas para todo número de pasos, dado que el modelo en análisis asume que el activo no tiene tendencia.

Donde $Var(\sigma_{CC}^2)$ corresponde a la varianza de la medida CC y $Var(\sigma_A^2)$ es la varianza de un estimador insesgado (σ_A^2) , para el cual se desea calcular la eficiencia relativa.

Garman y Klass (1980) y Rogers y Satchell (1991) computan ER para los estimadores de varianza descritos previamente en el caso continuo, mientras que los valores teóricos de ER para árboles binomiales en los cuales el número de pasos es inferior a 25 son presentados en el Cuadro 3⁴.

CUADRO 3
FACTORES DE CORRECCION Y EFICIENCIA RELATIVA

N	Factor de corrección		Eficiencia relativa a CC (*)		
	PK	RS	PK	RS	GK
1	1,000	0,000			
2	1,250	0,250	2,78	1,00	1,78
3	1,500	0,333	3,28	1,33	2,37
4	1,594	0,406	3,09	1,77	2,43
5	1,700	0,450	3,28	2,06	2,73
6	1,760	0,490	3,27	2,28	2,83
7	1,826	0,518	3,39	2,47	3,04
8	1,868	0,544	3,40	2,63	3,14
9	1,914	0,564	3,49	2,77	3,31
10	1,946	0,583	3,52	2,89	3,40
11	1,980	0,599	3,58	3,00	3,53
12	2,005	0,613	3,59	3,09	3,61
13	2,033	0,626	3,65	3,18	3,72
14	2,053	0,638	3,67	3,26	3,79
15	2,075	0,648	3,71	3,33	3,89
16	2,092	0,657	3,73	3,40	3,95
17	2,111	0,666	3,76	3,45	4,04
18	2,125	0,674	3,78	3,51	4,09
19	2,141	0,682	3,81	3,57	4,16
20	2,154	0,689	3,82	3,61	4,21
21	2,168	0,695	3,85	3,66	4,28
22	2,179	0,701	3,86	3,70	4,33
23	2,191	0,707	3,89	3,74	4,39
24	2,201	0,713	3,90	3,79	4,44
Infinito	2,773	1,000	5,20	6,04	7,41

(*) Ajustado por factores de corrección.

Fuente: Garman y Klass (1980), Rogers y Satchell (1991) y elaboración propia.

⁴ Notamos que para N pasos, el número posible de escenarios es 2^N . Debido a limitantes computacionales la Tabla 3 presenta solo los resultados hasta 24 pasos.

4. MEDIDAS BASADAS EN OPCIONES

Una forma alternativa de obtener una estimación de la volatilidad de un activo es a través del precio de opciones sobre el activo de interés. Estas medidas son ampliamente ocupadas en mercados financieros internacionales, existiendo incluso índices públicos de su cálculo.

En primer lugar, si se asume válido el modelo de Black-Scholes se puede recuperar el parámetro de volatilidad con precios observados de opciones, dicho cálculo de volatilidad se conoce como volatilidad implícita (*implied volatility*). Hull (2000) comenta que la volatilidad implícita es creíble para los casos de opciones *at-the-money*, es decir, cuyo precio de ejercicio sea cercano al precio *forward*.

Demeterfi *et al.* (1999) utilizan una generalización del modelo de Black-Scholes para generar una medida de volatilidad⁵ basada directamente en los movimientos del activo (*volatility swap*). El índice VIX corresponde al valor esperado de esta volatilidad, la cual se computa como 100 veces σ_{VS} , donde:

$$(14) \quad \sigma_{VS}^2 = \frac{\exp(rT)}{T} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(K_{i+1} - K_{i-1})}{K_i^2} Q(K_i) \right] - \frac{1}{T} \left(\frac{F}{G} - 1 \right)^2$$

En la fórmula T es el tiempo de expiración de las opciones (30 días), F es una aproximación del precio *forward* (promedio entre las opciones de compra y venta *at the money*), K_i es el precio de ejercicio de la opción i , $Q(K_i)$ es el valor de la opción asociada al precio de ejercicio K_i , que corresponde a una opción de compra si $K_i > F$ y a una opción de venta si $K_i < F$, G es el precio de ejercicio inmediatamente inferior a F y r corresponde a la tasa libre de riesgo.

5. RESULTADOS PARA EL IPSA

Utilizando datos diarios del valor del IPSA⁶ desde el 2 enero de 1996 al 18 de enero del 2008 se calculan varianzas de retornos del índice con ventanas de 21 días y la varianza propuesta por RiskMetrics. La correlación entre ambas medidas es 0,96 ratificando el resultado analítico presentado en la sección II. Asimismo, el Gráfico 1 muestra que los movimientos de ambas series de volatilidad responden a episodios de turbulencia como aquellos ocurridos en el último trimestre de 1998, cuando la volatilidad superó el 50% debido a la crisis asiática, y desde agosto de 2007 hasta la fecha, período en el cual se ha apreciado un constante aumento de la volatilidad producto de la crisis *subprime* en Estados Unidos.

⁵ Para una derivación simplificada de esta medida véase Alfaro y Silva (2008).

⁶ IPSA es el Índice Selectivo de Precios de Acciones de la Bolsa de Comercio de Santiago, que agrupa a las 40 acciones con mayor presencia bursátil.

GRAFICO 1
RISKMETRICS (RM) Y DESVIACION ESTANDAR MOVIL (DE) DE 21 DIAS
(porcentaje)

Fuente: Elaboración propia a base de información de Bloomberg.

Con toda la muestra se estima un modelo GARCH(1,1) para el IPSA, obteniéndose una persistencia de 0,976 y una volatilidad incondicional de 20%. Sin embargo, estos resultados no parecieran ser estables en el tiempo. El Gráfico 2 presenta la persistencia computada en ventanas móviles de dos años ($n=500$)⁷.

Posiblemente el alto número obtenido para toda la muestra (0,976) puede ser producto de episodios particulares de crisis, lo que se manifiesta en una volatilidad incondicional más alta y/o un ajuste a modelos de persistencia unitaria (IGARCH), como se desprende de los datos de fines del 2007. En efecto, el Gráfico 3 presenta la desviación estándar móvil y la volatilidad incondicional computada con los parámetros del modelo GARCH, cuando éste presenta una persistencia menor a 0,99⁸. Se aprecian cambios de nivel importantes en la volatilidad incondicional durante los últimos diez años. En particular, los períodos de la crisis del 98 y las turbulencias de finales del 2007 presentan volatilidades por sobre el 30%, mientras que durante los años 2002 al 2006, la volatilidad incondicional se mantuvo en torno a 15%. Cabe destacar que la volatilidad medida como desviación estándar móvil si bien sigue los movimientos de la volatilidad incondicional, su trayectoria es mucho más suavizada, aun en períodos turbulentos.

⁷ La conclusión sobre la inestabilidad de la persistencia se mantiene cuando se utilizan ventanas móviles más largas (3 y 4 años).

⁸ Para finales del 2007 no se computa volatilidad incondicional dado que los datos responden a un modelo de persistencia unitaria (IGARCH). Este modelo resulta coherente con el episodio de turbulencias financieras del último período de la muestra.

GRAFICO 2
PERSISTENCIA GARCH(1,1)

Fuente: Elaboración propia a base de información de Bloomberg.

GRAFICO 3
VOLATILIDAD INCONDICIONAL (VI) Y DESVIACION
ESTANDAR MOVIL (DE)
(porcentaje)

Fuente: Elaboración propia a base de información de Bloomberg.

Para el último período de la muestra, esto es, ventanas que cierran a fines de 2007 y principios de 2008, se calcula un modelo de persistencia unitaria (IGARCH), cuyas estimaciones arrojan, en promedio, un valor de 0,82 para el parámetro beta.

Basados en el resultado del Teorema 1 un IGARCH debiese ser replicable con desviaciones estándares. Para el parámetro 0,82 el largo de la ventana que maximiza la correlación es de seis días. Esto es coherente con el episodio de turbulencias financieras del último período de la muestra, en el cual los movimientos de la volatilidad se encuentran más ligados a eventos de la semana anterior que a fundamentales históricos.

Para calcular las medidas de volatilidad intradiaria para el IPSA es necesario conocer los factores de corrección aplicables al caso chileno. Usando datos diarios desde el 2 de enero de 1996 al 18 de enero del 2008 se estimaron los valores históricos de la volatilidad usando precios de cierre y precios intradiaria del IPSA. El cuociente entre la volatilidad sin corregir de Parkinson y la desviación estándar diaria entrega una mediana de 1,54, es decir, el factor de corrección para el caso del mercado bursátil chileno es menor que el sugerido por Parkinson (1980) para el caso de un número grande de transacciones, pero es mayor que para el caso de 24 transacciones como fue presentado en el Cuadro 3. Conociendo el factor de corrección para el IPSA, es posible computar una medida insesgada de volatilidad anualizada de la siguiente forma⁹:

$$(15) \quad \hat{\sigma}_{HL2,t} = \sqrt{250} \frac{\hat{\sigma}_{HL,t}}{1,54} = \sqrt{\frac{250}{2,37}} \sqrt{(h_t - l_t)^2} \approx 10 \cdot \left(\frac{H_t}{L_t} - 1 \right)$$

Donde H_t y L_t son los precios máximo y mínimo registrados durante un día específico. Del mismo modo, la mediana del cuociente entre la volatilidad según Rogers-Satchell y la desviación estándar diaria¹⁰ es de 0,88, con lo cual se obtiene una medida insesgada de volatilidad anualizada para el IPSA como:

$$(16) \quad \hat{\sigma}_{RS2,t} = \sqrt{250} \frac{\hat{\sigma}_{RS,t}}{0,88} \approx 18 \sqrt{\left[\left(\frac{H_t}{C_t} - 1 \right) \cdot \left(\frac{H_t}{O_t} - 1 \right) + \left(\frac{L_t}{C_t} - 1 \right) \cdot \left(\frac{L_t}{O_t} - 1 \right) \right]}$$

Donde H_t , L_t , O_t y C_t son los precios máximo, mínimo, apertura y cierre registrados durante el día. El Gráfico 4 presenta estas medidas en frecuencia mensual junto a la tradicional desviación estándar móvil (CC).

⁹ Nótese que la medida basada en HL está afectada por la tendencia del activo durante el día. Yang y Zhang (2000) argumentan que dicha tendencia debiera ser pequeña en caso de usar datos intradiaria, en donde los agentes no debieran esperar movimientos significativos del precio del activo.

¹⁰ El intervalo de confianza al 95% para ambos factores de corrección implica rangos de estimación de (1,50-1,58) y (0,84-0,92) respectivamente.

GRAFICO 4
MEDIDAS DE VOLATILIDAD

Fuente: Elaboración propia a base de información de Bloomberg.

Se observa que todas las medidas se correlacionan positivamente con los episodios de turbulencias. En particular, durante el período de análisis las medidas mayormente correlacionadas son *HL* y *CC* (0,95). Esto implica que una medida intradiaria, como la basada en *HL*, puede recoger la misma información que una medida tradicional, como *CC*, pero de una manera más eficiente. En la práctica esto significa que se requieren menos días en la ventana móvil de *HL* para obtener el mismo error estándar que en *CC*.

Basado en los resultados anteriores: alta correlación de *HL* y *CC*, mayor eficiencia de *HL* y simplicidad de la volatilidad basada en Parkinson ($\hat{\sigma}_{HL2}$), proponemos computar un índice de Volatilidad Intradiaria del Mercado Accionario Chileno (*VIMA*) como sigue:

$$(17) \quad VIMA = 1000 \cdot \left(\frac{H}{L} - 1 \right)$$

Donde *H* y *L* corresponden a los precios máximo y mínimo observados durante un día, y el factor 1000 contiene todos los ajustes para esta medida: sesgo y anualización.

El valor promedio de *VIMA* para toda la muestra es de 12,3%, pero ha alcanzado valores superiores a 28%. El nivel del índice es consistentemente mayor en los períodos de turbulencias financieras de los últimos años, alcanzando en promedio el mayor nivel de volatilidad durante el reciente periodo agosto-diciembre de 2007 (Cuadro 4).

CUADRO 4
ESTADÍSTICAS DESCRIPTIVAS DE *VIMA*
(porcentaje)

	Promedio	Mediana	Percentil 5%	Percentil 95%
Toda la muestra	12,27	10,06	3,92	28,04
Sep. 2001	16,29	12,60	4,68	30,27
Sep.-Oct. 2002	13,85	12,57	5,90	25,94
May.-Jun. 2006	12,95	10,62	3,66	27,10
Feb. 2007	17,29	13,93	5,38	47,10
Ago.-Dic. 2007	18,12	15,01	5,60	34,05

Fuente: Elaboración propia a base de información de Bloomberg.

6. COMPARACIÓN ENTRE VOLATILIDAD REALIZADA E IMPLÍCITA

Una forma de validar las medidas de volatilidad realizada (*CC*, *HL* y *RS*) es calcularlas para mercados en los cuales existe información de opciones y comparar los resultados. Esto es posible de implementar para el índice S&P 500, el cual tiene asociado un índice de volatilidad medido a través de opciones (*VIX*).

Sobre la base de datos diarios para el periodo 2004-2008, calculamos *CC*, *HL* y *RS* para el S&P 500. Por tratarse de un mercado bursátil desarrollado, se aplican los factores de corrección sugeridos por la literatura.

Como era esperado, los resultados muestran que las medidas *HL* y *RS* presentan menores desviaciones estándares que *CC* (Cuadro 5), dando cuenta de la mayor eficiencia en la estimación de la volatilidad cuando se agrega información de precios mínimos y máximos. También es posible observar que *RS* presenta un promedio inferior a *HL* y *CC*, hecho que se explica porque *RS* no considera los eventos con retorno.

CUADRO 5
VOLATILIDAD DEL S&P 500
(porcentaje)

	Promedio	Mediana	Desv. Est.	Percentil 5%	Percentil 95%
CC	9,47	7,05	8,91	0,73	25,78
HL	9,80	8,44	5,62	3,91	20,22
RS	8,62	7,50	5,78	2,08	18,42
VIX	15,24	13,97	4,45	10,74	25,54

Fuente: Elaboración propia a base de información de Bloomberg.

Por otro lado, notamos que la medida del VIX es superior a las volatilidades realizadas del S&P 500, mientras que su desviación estándar es inferior. Lo primero podría dar cuenta que VIX incluye un premio por riesgo asociado a la incertidumbre de los contratos de opciones. Por otra parte, la desviación estándar de VIX resulta ser menor por cuanto este índice se define como el valor esperado de la volatilidad promedio para los próximos 30 días.

Finalmente, las correlaciones entre las medidas de volatilidad realizada y el VIX son del orden de 0,5 con datos diarios y 0,9 en promedios móviles (Cuadro 6). Notamos que las correlaciones de las medidas *HL* y *RS* son superiores a las obtenidas por *CC* cuando se utilizan datos diarios pero tienden a converger en el caso de promedios móviles.

CUADRO 6
CORRELACION DEL VIX CON MEDIDAS DE VOLATILIDAD DEL S&P 500
(porcentaje)

	Medidas diarias	Ventanas móviles (1)
CC (2)	0,45	0,89
HL	0,67	0,90
RS	0,52	0,86

Notas: (1) Ponderadas exponencialmente, usando un factor de 0,94. (2) Nótese que la ventana móvil de CC es equivalente a RiskMetrics.

Fuente: Elaboración propia a base de información de Bloomberg.

En conclusión, este ejercicio nos muestra que medidas de volatilidad realizada, y en particular *HL* y *RS*, recogen adecuadamente las variaciones del VIX. Por este motivo consideramos que dichas medidas podrían ser buenas alternativas como estimadores de la volatilidad del mercado bursátil cuando no existe un mercado de derivados que permita generar un índice de volatilidad como el VIX.

7. CONCLUSIONES

En este artículo resumimos diversas medidas de volatilidad utilizando datos diarios, donde consideramos metodologías tradicionales que se basan en precios de cierre del activo y medidas alternativas que utilizan información de precios del activo dentro del día. De la revisión bibliográfica encontramos que medidas que utilizan información intradiaria son más eficientes, mientras que el análisis empírico nos mostró que en períodos de turbulencias las series se alejan de sus parámetros históricos haciendo relevante sólo la información de más corto plazo.

Aunando estos resultados, proponemos un índice de volatilidad para el índice accionario IPSA (*VIMA*) que utiliza el máximo y mínimo del índice dentro del día y corresponde a una adaptación del índice de volatilidad propuesto por Parkinson

(1980). *VIMA* es sesgado si el IPSA presenta tendencia, pero estimamos que este hecho no debiera ser importante en el caso de datos diarios.

Adicionalmente, corroboramos que medidas de volatilidad realizada son apropiadas para mercados bursátiles que no poseen opciones debido a que, para el caso del S&P 500, dichas medidas presentan una alta correlación con aquellas derivadas de opciones.

REFERENCIAS

- Alfaro, R. y C. G. Silva (2008), "Medidas de Volatilidad de Indices Accionarios: el caso del IPSA", Documento de Trabajo N° 462, Banco Central de Chile.
- Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive condicional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics* 31 (3): 307-327.
- Cox, J., S. Ross y M. Rubinstein (1979), "Option pricing: a simplified approach", *Journal of Financial Economics* 7 (3): 229-263.
- Demeterfi, K., E. Derman, M. Kamal y J. Zou (1999), "More Than You Ever Wanted to Know About Volatility Swaps", Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes.
- Engle, R. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica* 50 (4): 987-1007.
- Engle, R. (2001), "GARCH101: The use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics", *The Journal of Economic Perspectives* 15 (4): 157-168.
- Garman, M. y M. Klass (1980), "On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data", *The Journal of Business* 53 (1): 67-78.
- Hansen, P. y A. Lunde (2001), "A comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)", University of Aarhus Working Paper N° 84.
- Hwang, S. y P. Pereira (2003), "Small Sample Properties of GARCH Estimates and Persistence", Financelab Working Paper.
- Lumsdaine, R. (1995), "Finite-Sample Properties of the Maximum Likelihood Estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) Models: A Monte Carlo Investigation", *Journal of Business & Economic Statistics* 13 (1): 1-10.
- Parkinson, M. (1980), "The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return", *The Journal of Business* 53 (1): 61-65.
- Rogers, L. y S. Satchell (1991), "Estimating Variance from High, Low, and Closing Prices", *The Annals of Applied Probability* 1 (4): 504-512.
- Willmot, P. (2006), *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, segunda edición. John Wiley & Sons, Ltd.
- Yang, D. y Q. Zhang (2000), "Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and Close Prices", *The Journal of Business* 73 (3): 477-491.

APÉNDICE

Para calcular el error cuadrático medio es necesario conocer el cuarto momento de la distribución, cuyos cálculos se presentan a continuación:

$$E\left(\sigma_{CC}^4\right)=\frac{1}{4}\left(\sigma\sqrt{2}\right)^4+\frac{1}{4}\left(-\sigma\sqrt{2}\right)^4=2\sigma^4,$$

$$E\left(\sigma_{HL}^4\right)=2\left[\frac{1}{4}\left(\sigma\sqrt{2}\right)^4+\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2}\right)^4\right]=2,125\sigma^4,$$

$$E\left(\sigma_{RS}^4\right)=\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2}\right)^4+\frac{1}{4}\left(\frac{-\sigma\sqrt{2}}{2}\right)^4\right]=0,125\sigma^4,$$

$$\begin{aligned} E\left(\sigma_{GK}^4\right) &= \frac{1}{4} E\left(\sigma_{PK}^4\right) - 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1,25}{2} - 1\right) E\left[\left(h-l\right)^2 c^2\right] + \left(\frac{1,25}{2} - 1\right)^2 E\left(\sigma_{CC}^4\right), \\ &= 0,25 \cdot 2,125\sigma^4 + 0,375 \cdot 2\sigma^4 + 0,375^2 \cdot 2\sigma^4 = 1,5625\sigma^4 \end{aligned}$$

$$E\left[\left(h-l\right)^2 c^2\right]=\frac{1}{4}\left(\sigma\sqrt{2}\right)^2\left(\sigma\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\sigma\sqrt{2}\right)^2\left(-\sigma\sqrt{2}\right)^2=2\sigma^4.$$