Formación Universitaria
Vol. 13(5), 177-190 (2020)
http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000500177

# Estudio de las aprehensiones en el registro gráfico y génesis instrumental de la integral definida

**Mihály A. Martínez-Miraval[1*] y Daysi J. García-Cuéllar[2]**
(1) Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Dpto. de Ciencias, Av. Alonso de Molina Nro. 1611, Santiago de Surco – Perú. (correo-e: pcmammar@upc.edu.pe)
(2) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PEPG em Educação Matemática, Rua Marquês de Paranaguá, nº111, São Paulo – Brasil. (correo-e: ra00193072@pucsp.edu.br)

* Autor a quien debe ser dirigida la correspondencia.

*Recibido Feb. 15, 2020; Aceptado Abr. 13, 2020; Versión final Jun. 13, 2020; Publicado Oct. 2020*

### Resumen

El objetivo de esta investigación fue analizar cómo estudiantes universitarios aprehenden el concepto de integral definida, mediado por GeoGebra. Luego utilizan el concepto como un instrumento para el cálculo de medidas de áreas de regiones limitadas por la gráfica de una función continua y el eje X en un intervalo dado. Se utilizan como marcos teóricos, el enfoque instrumental para estudiar el proceso de transformación del artefacto simbólico integral definida en instrumento, y la teoría de registros de representación semiótica para identificar las aprehensiones en el registro gráfico que desarrollan los estudiantes en este proceso. Las acciones de los estudiantes evidenciaron el desarrollo de esquemas de utilización como los de sumatoria y límite, propios del concepto de integral definida. Los estudiantes también tuvieron la pertinencia de realizar transformaciones a la gráfica de una función (aprehensión operatoria) para el cálculo de medidas de áreas. Se concluye que el uso de GeoGebra favorece a que los estudiantes generen nociones intuitivas sobre la integral definida.

*Palabras clave: integral definida; áreas; génesis instrumental; aprehensiones; GeoGebra*

# Study of the apprehensions in the graphic register and instrumental genesis of the definite integral

### Abstract

The main objective of this research study was to analyze how university students apprehend the concept of definite integral, mediated by GeoGebra. Then, they use the concept as an instrument to determine the area of a region limited by the continuous function graph and the X axis in a given interval. The theoretical framework applied included the instrumental approach to study the transformation process of the symbolic artifact definite integral in an instrument. The theoretical framework also included the theory of semiotic representation records to identify the apprehensions in the graphic register developed by students. The students' actions showed evidence of the creation of utilization schemes such as summation and limit, typical of the definite integral concept. Students also had pertinence to make transformations to the graph of a function (operative apprehensions) to determine the area. It is concluded that GeoGebra usage favored student in generating intuitive notions about the definite integral.

*Keywords: definite integral; areas; instrumental genesis; apprehensions; GeoGebra*

## INTRODUCCIÓN

Las investigaciones relacionadas con el Cálculo integral muestran la necesidad de realizar estudios sobre la integral definida, dado que informan sobre la importancia de lograr la comprensión de este concepto, que se debería manifestar tanto en los procesos que se siguen en su construcción, como en su aplicación en diversos contextos. El estudio del cálculo integral, en particular de la integral definida, forma parte del currículo peruano del nivel universitario, en los cursos de Cálculo de la mayoría de las carreras profesionales. Las aplicaciones de la integral definida son diversas y el desarrollo de problemas contextualizados es parte de las competencias que deben desarrollar los estudiantes de las diferentes carreras. Estas aplicaciones, en carreras de Ingeniería y Arquitectura, se orientan al cálculo de áreas de regiones, longitudes de curvas, áreas laterales de túneles, volúmenes, entre otros (Camacho, Depool y Garbín, 2008); en carreras de Física o Medicina se aplica la integral definida mediante Sumas de Riemann, para determinar la masa de un objeto cuando la densidad no es la misma en todo el cuerpo, para determinar la distancia de un móvil que se desplaza con diferentes velocidades respecto del tiempo, para calcular la energía de un resorte a partir del producto de la fuerza por la distancia, o determinar la fuerza del agua a partir del producto entre la presión que ejerce y el área afectada (Sealey, 2015; Jones, 2014); en la carrera de Administración, la integral definida se aplica para hallar el superávit de los productores y consumidores, o para determinar los cambios netos de funciones económicas expresadas como razones de cambio; y así podemos encontrar diversas aplicaciones de la integral definida en otras carreras.

Las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la integral definida han sido advertidas por diferentes investigadores (Dominguez, Barniol y Zavala, 2019; Aranda y Callejo, 2017; Tatar y Zengin, 2016; Jones, 2015; Sealey, 2014; Boigues, Llinares y Estruch, 2010; Camacho et al., 2008). Respecto a los procesos involucrados en la construcción del concepto de integral definida, como la partición de un intervalo, las sumas de medidas de áreas de rectángulos, y el límite de estas sumas, se evidencian dificultades para relacionar la altura de cada rectángulo con la imagen de una función, no es clara la dependencia entre la sucesión de sumas de Riemann y en valor $n$ de la partición realizada, no se emplea el concepto de sucesión de forma funcional, sino como un listado de elementos; no se relaciona el límite de las sumas de Riemann y la idea de área bajo la curva (Boigues et al., 2010), estas dificultades antes mencionadas, explican Kouropatov y Dreyfus (2014), puede deberse a que en este proceso de aproximación del área al aumentar el número de rectángulos se toma en cuenta no solo dos, sino hasta tres cantidades que varían simultáneamente. Estas dificultades se extienden al momento de determinar el desplazamiento de un móvil a partir de la gráfica de su velocidad, o determinar el volumen de agua de una piscina a partir de la gráfica de razón de cambio, ambos respecto al tiempo, siendo la integral definida el concepto central a utilizar (Harini, Fuad y Ekawati, 2018).

Las dificultades de los estudiantes al momento de interpretar la integral definida desde una perspectiva gráfica (Dominguez, Barniol y Zavala, 2019), y la falta de coordinación entre los procesos de partición, sumas y límites, descritos en el párrafo anterior, con sus respectivas representaciones tanto algebraica, gráfica y numérica, puede generar que los estudiantes no adquieran un conocimiento sólido acerca de la integral definida, lo que dificultaría el aprendizaje de este concepto (Tatar y Zengin, 2016), y ocasionaría que los estudiantes no estén lo suficientemente preparados para enfrentar cursos en donde la concepción de integral definida como el límite de una suma de Riemann tenga sentido en situaciones contextualizadas de la física e ingeniería (Jones, 2015). Por tal motivo, se hace necesario entender la estructura de las sumas de Riemann, que implica la comprensión del producto entre la amplitud de cada subintervalo y la imagen de la función, la suma de estos productos, y la relación que se da entre las sumas de Riemann y la integral definida a partir del límite, esto es, fusionar los conocimientos previos sobre funciones, tasas de variación, límites, etc., con la nueva información, que en este caso son las sumas de Riemann (Sealey, 2014).

La integración de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos de naturaleza dinámica, ya sea a partir de actividades interdisciplinarias o del diseño de applets, favorece a la comprensión de conceptos geométricos, y al desarrollo de construcciones geométricas dinámicas (García, Eguia, Etxeberria y Alberdi, 2020). Existen investigaciones que hacen uso de las tecnologías para introducir el concepto de integral definida, o de otros conceptos afines como la función integral. Entre estas investigaciones figuran las de Camacho et al. (2008), que diseñaron 9 módulos de laboratorio con el programa Derive, siendo los 4 últimos relacionados al estudio de la integral definida y a su aplicación en diferentes contextos. Los autores manifiestan que los estudiantes se apropiaron del programa Derive como un instrumento de aprendizaje, y señalan que el uso de la tecnología contribuye con eficacia a promover la construcción del concepto de integral definida cuando se le asocia al cálculo del área. Del mismo modo, Tatar y Zengin (2016) implementaron un método de instrucción asistido por computadora, mediado por GeoGebra a partir de applets, para comprender conceptualmente la integral definida; estos applets fueron diseñados utilizando deslizadores, donde se puede modificar el dominio de una función, realizar particiones regulares a dicho dominio, obtener la amplitud de cada partición, representar rectángulos inscritos y circunscritos a una región plana, y analizar valores numéricos de las sumas de las medidas de las áreas de dichos rectángulos.

Tatar y Zengin (2016) manifiestan que este método de instrucción asistido por computadora contribuye positivamente a la enseñanza de la integral definida, dado que obtuvieron comentarios favorables sobre el método propuesto: crea un ambiente de aprendizaje dinámico, permite una comprensión y explicación exhaustivas de las habilidades que generan la apropiación de conceptos, facilita el aprendizaje conceptual de la relación entre la suma inferior, la suma superior y la suma de Riemann, entre otros.

Finalmente, Aranda y Callejo (2017) identifican ciertas características de cómo los estudiantes construyen el concepto de función integral en un experimento de enseñanza, donde manipularon deslizadores diseñados en GeoGebra para cambiar los intervalos de análisis, las características de las funciones, y sombrear regiones limitadas por estas y el eje X, para luego hallar la medida de sus áreas. Las investigadoras consideran a estos applets como instrumentos que permiten desarrollar una mejor comprensión gráfica de la función integral gracias al entorno favorable que ofrecen, en donde se puede trabajar con el objeto matemático en distintos sistemas de representación, por encima de la visión algorítmica y algebraica que generalmente prevalecen.

Dada la importancia del concepto de integral definida y de las dificultades evidenciadas en los antecedentes, nuestro estudio tiene como objetivo analizar cómo estudiantes de una universidad de Lima, Perú, aprehenden el concepto de integral definida, mediado por GeoGebra, y lo utilizan como un instrumento para el cálculo de medidas de áreas de regiones limitadas por la gráfica de una función continua y el eje X, en un intervalo dado. Para el análisis de la producción de los estudiantes al desarrollar las actividades propuestas, se considera al Enfoque Instrumental como marco teórico para el estudio del proceso de transformación del artefacto simbólico integral definida en instrumento, y se utilizan aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica como marco teórico para la identificación de las aprehensiones en el registro gráfico que desarrollan los estudiantes en dicho proceso.

## METODOLOGÌA

La metodología usada en nuestra investigación está compuesto por el Enfoque Instrumental de Rabardel (2002) y la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995). La razón por la cual usamos estos dos referentes teóricos es porque permiten observar fenómenos didácticos diferentes pero que surgen de manera complementaria, mientras el Enfoque Instrumental está enfocado en cómo el estudiante genera esquemas de utilización cuando comprende o aprende la integral definida, apropiándose de conceptos y propiedades. Por otro lado, la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, pone énfasis en el poder semiótico de las representaciones utilizadas por los estudiantes cuando se apropian del concepto de Integral definida, esto último por medio de la conversión de las representaciones en los registros gráfico y algebraico, así como en las aprehensiones dentro de un registro (en nuestro estudio, en el registro gráfico) propuesto por Duval (1995). A seguir se presentan las nociones fundamentales en que nos hemos basado en nuestro estudio de estos dos referenciales teóricos.

El Enfoque Instrumental, desarrollado por Rabardel (2002), permite describir las interacciones entre un sujeto y un artefacto a medida que el sujeto va adquiriendo experiencia y práctica en el uso de ese artefacto. Para el autor, los conceptos de artefacto e instrumento son fundamentales en la Génesis Instrumental. Un artefacto está relacionado con lo que se concebía como herramienta y puede ser material (calculadora, ábaco, etc.) o simbólico (un gráfico, o un objeto matemático como es la integral defina en nuestro estudio). Por otro lado, el instrumento es un artefacto en acción, es decir, es lo que un sujeto construye a partir de la interacción con el artefacto. Además, el investigador indica que el instrumento no es solo un objeto externo al sujeto, sino que debe ser vinculado a la acción, producción y construcción del propio sujeto, es por ello que el instrumento es definido como una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción con este. Para Rabardel, el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó como proceso de Génesis Instrumental; el autor sostiene que el artefacto pasará al estatus de instrumento cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes.

El proceso de Génesis Instrumental consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación. Según Rabardel (2002), las dos dimensiones de la Génesis Instrumental se diferencian en su orientación, hacia el artefacto o hacia la generación de esquemas por parte del sujeto. La instrumentalización está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta del enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto, es decir, es el resultado de la atribución de una función al artefacto; y la instrumentación está dirigida hacia el propio sujeto, se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. Los esquemas vinculados a la utilización de un artefacto pueden tener dos estatus de acuerdo a su orientación: se tratan de los esquemas de uso, si está dirigida a la gestión de las características y propiedades particulares del artefacto (tareas secundarias), y se trata de esquemas de acción instrumentada, si están orientados al objetivo principal de la tarea (tarea principal).

En nuestro estudio, nos centraremos en los esquemas de uso y de acción instrumentada. En cuanto a estos dos tipos de esquemas, Rabardel (2002) considera que un mismo esquema puede tener diferente estatus, es decir, esquema de uso o de acción instrumentada, esto no se refiere a una propiedad del esquema en sí mismo, sino a su estatus dentro de la actividad realizada por el sujeto (su relación con una tarea principal o secundaria). Por lo tanto, en nuestra investigación consideramos ese criterio y según el objetivo de la actividad, reconoceremos el estatus del esquema como el de uso o el de acción instrumentada.

La Teoría de Registros de Representación Semiótica, desarrollada por Duval (1995), sustenta que un objeto matemático no es factible de ser manipulado directamente, sino a través de sus representaciones, y se consideran como registros de representación semiótica a los registros de lenguaje natural, figural, gráfico y algebraico. Para Duval (2006), las representaciones semióticas, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, entre otros), son el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros.

Según Duval (2006), las actividades cognitivas fundamentales de representación son la *formación,* que implica recurrir al uso de signos para sustituir la visión de un objeto; el *tratamiento*, que es la transformación de una representación en el propio registro que fue formada; y la *conversión*, que es una transformación de una representación en un registro a otro registro distinto al que se formó. Para el autor, una persona logra el aprendizaje de un objeto matemático si realiza, mínimamente, la conversión de la representación de dicho objeto en dos registros de representación semiótica diferentes. Es en esta última transformación donde el sujeto articula las distintas aprehensiones de la representación en un registro. De acuerdo con Duval (1995), la *aprehensión perceptiva* es la primera que aparece en el proceso cognitivo del estudiante y es la que permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático en el plano o en el espacio. Para el investigador, una figura (en nuestro estudio, una representación gráfica en el plano cartesiano) muestra objetos que se destacan independientemente del enunciado de un problema. Sin embargo, los objetos nombrados en el enunciado no son necesariamente aquellos que aparecen de forma espontánea.

En la figura 1, mostramos algunos elementos que un estudiante puede reconocer cuando se generan rectángulos que coinciden en uno de sus vértices con la representación gráfica de una función, los cuales darían indicios del desarrollo de una aprehensión perceptiva para el concepto de integral definida a partir de la suma de Riemann.

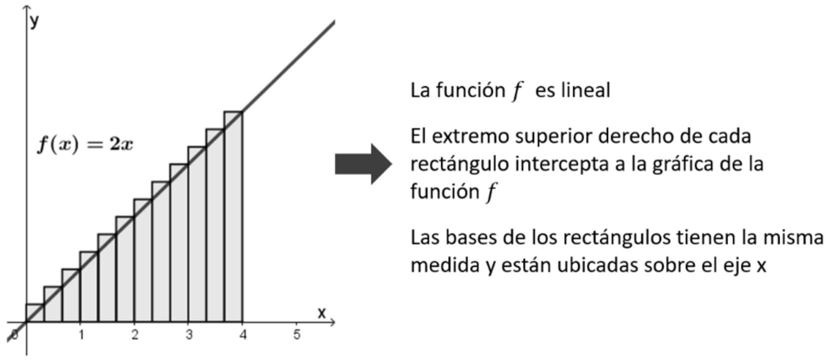



Fig. 1: Ejemplo de una aprehensión perceptiva

En cuanto a la *aprehensión discursiva*, Duval (1995) señala que es aquella que corresponde a una acción mediante la cual el sujeto hace uso de propiedades, teoremas o axiomas que no son explícitas a partir de la representación gráfica. En la figura 2, mostramos algunos elementos que un estudiante puede reconocer cuando se generan rectángulos cuya suma de medidas de áreas se aproximan a la medida del área de una región R, los cuales darían indicios del desarrollo de una aprehensión discursiva para el concepto de integral definida a partir de la suma de Riemann.

La *aprehensión operatoria* tiene que ver con las modificaciones o transformaciones que podemos hacer a las figuras (en nuestro estudio a una representación gráfica en el plano cartesiano), para lo cual se distinguen tres tipos: la modificación mereológica, la modificación óptica y la modificación posicional (Duval, 1995). Nos centramos en la aprehensión operatoria del tipo modificación posicional que, según Duval (1995), consiste en el desplazamiento de una figura en relación a un referencial, es decir, mediante movimientos por rotación, traslación y simetría. En nuestro caso, dado que trabajamos en el registro gráfico, se usa la simetría axial pues el referencial es el eje X, lo cual permite determinar la medida del área de una región limitada por la gráfica de una función negativa y el eje X en un intervalo dado, como se puede observar en la figura 3.

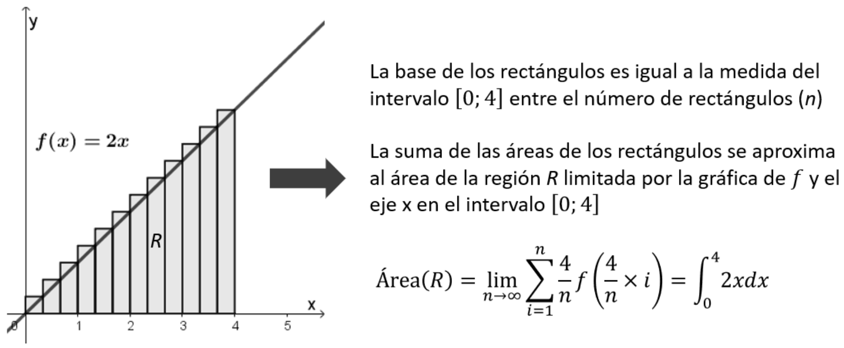



Fig. 2: Ejemplo de una aprehensión discursiva

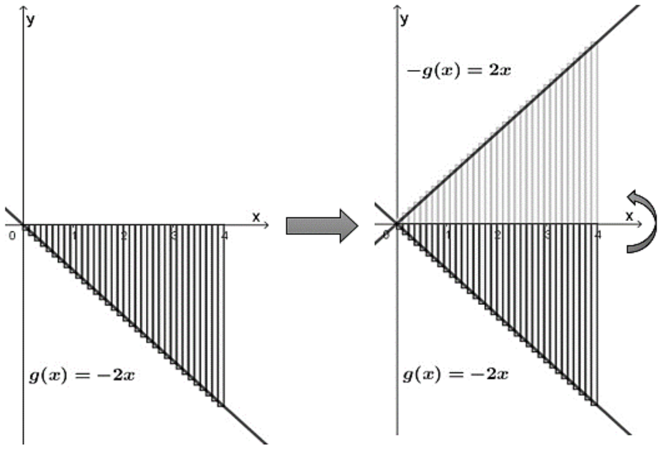



Fig. 3: Ejemplo de una aprehensión operatoria del tipo modificación posicional

Para nuestro estudio, hemos tomado aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (2015) como metodología de investigación, la cual es de corte cualitativo. Se denominó de esta manera por la forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero, quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Al igual que un ingeniero, el profesor concibe, realiza, observa y analiza secuencias de enseñanza para lograr el aprendizaje de un contenido matemático determinado por un grupo específico de estudiantes.

Utilizamos la Ingeniería Didáctica para la investigación, considerando las siguientes fases: 1. La concepción y análisis a priori, donde se enuncia un conjunto de supuestos sobre lo que harán los estudiantes; 2. La experimentación, en donde predomina el acercamiento entre el docente investigador y la población de estudiantes que son sujetos de la investigación, también se aplican los instrumentos diseñados por el investigador y se lleva a cabo los registros de observación de la experiencia; y 3. El análisis a posteriori y validación, en esta fase, se realiza el análisis de los datos recolectados durante los diferentes momentos de la experiencia en los dos encuentros realizados con los estudiantes y los contrastamos con el análisis a priori. En el presente artículo hacemos énfasis en las fases de análisis a priori y el análisis a posteriori de la Ingeniería didáctica para la investigación.

## RESULTADOS

La parte experimental se realizó en dos encuentros con seis estudiantes que voluntariamente decidieron participar de nuestra investigación, y que estaban matriculados en el curso de Cálculo de la carrera de Administración de una universidad privada de Lima, Perú. Estos estudiantes pertenecían al segundo semestre y llevaron cursos previos como nivelación de matemática (dado en el semestre cero, es decir, a nuevos ingresantes a la universidad) y el curso de fundamentos del cálculo (dado en el primer semestre). En cuanto a la experiencia, en el primer encuentro, nos centramos en el desarrollo de la actividad N° 1 que se enfoca en el proceso de instrumentalización, es decir, del enriquecimiento de las propiedades y características del artefacto simbólico integral definida como el límite de una suma de términos; y en el segundo encuentro, se dio énfasis al proceso de instrumentación de nuestro artefacto con el desarrollo de la actividad N° 2. Para dar respuestas a ambas actividades, los estudiantes debían coordinar las aprehensiones perceptiva, discursiva y operacional.

Para la realización de las actividades, cada estudiante contaba con fichas de trabajo, calculadora y su celular donde se instaló previamente el GeoGebra y un lector de código QR, así como acceso a internet. El código QR fue diseñado para que los estudiantes accedan a un applet en GeoGebra, de modo que, al interactuar con la tecnología, realicen procesos de aproximación a la medida del área de una región limitada por la gráfica de una función continua (positiva o negativa) y el eje X, en un intervalo dado, representando de forma dinámica la partición regular de dicho intervalo, y su refinamiento al aumentar el número de rectángulos. A continuación, presentamos el análisis a priori y a posteriori de las dos actividades propuestas. Consideramos los resultados de dos estudiantes que denominamos Carmen y Jacky, que participaron en la parte experimental y presentaban conocimientos previos sobre funciones, límites y derivadas. Usamos los resultados de ambas estudiantes porque aseguraron no haber estudiado antes la integral definida, es decir, dicho objeto matemático era un artefacto para ellas, y porque asistieron a todas las sesiones de la parte experimental.

*Análisis de las preguntas de la actividad 1*

La tabla 1 muestra las preguntas de la actividad. En la actividad 1a, a priori se espera que los estudiantes, luego de asignar el valor $n = 4$ al deslizador y ver representados cuatro rectángulos como se muestra en la figura 4, reconozcan a partir de la aprehensión perceptiva, que la altura de cada rectángulo es igual a la imagen de la función $f$ en el extremo derecho de cada base, que es un número entero positivo. Una vez reconocidas las alturas y por la forma guiada de la tarea, se espera que determinen la suma de las medidas de las áreas de los cuatro rectángulos. Por sus conocimientos previos de sumatorias, pensamos que los estudiantes pueden realizar el tratamiento de la suma en el registro algebraico, es decir, expresarla de forma reducida utilizando la notación de sumatoria, para luego hallar el valor correcto de la suma, ya sea usando sus calculadoras científicas, o aplicando propiedades de sumatorias. Estas acciones se repiten para los valores $n = 8$ y $n = 50$, donde los estudiantes deben conjeturar a partir de la aprehensión discursiva, que la medida de la base de cada rectángulo se obtiene al dividir la medida del intervalo [0; 4] entre el número de rectángulos, y luego, realizar un procedimiento similar de reducción de la suma en la notación de sumatoria. Para esta actividad, los estudiantes deben movilizar esquemas de uso, tales como medida del área de figuras geométricas, intervalos, funciones, y sumatorias.

Tabla 1: Preguntas de la actividad 1

<table>
<tr><td rowspan="3">Actividad 1<br><br>Lea el código QR. En él encontrará lo siguiente: dos casillas que esbozan las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$; los deslizadores $a$ y $b$ que limitan una región en el intervalo [$a$; $b$]; y el deslizador $n$ que dibuja $n$ rectángulos de igual base en dicho intervalo.<br><br>Marque la casilla $f(x)$ y coloque $a = 0$ y $b = 4$, luego manipule el deslizador $n$.</td><td>a. En cada ítem dé la siguiente información: medida de la base de cada rectángulo; altura de cada rectángulo en términos de $f$; suma de las medidas de las áreas de los $n$ rectángulos utilizando la notación de sumatoria; y, finalmente, halle el valor de dicha suma cuando:<br>i. $n = 4$<br>ii. $n = 8$<br>iii. $n = 50$</td></tr>
<tr><td>b. Lee atentamente y responde:<br>i. Si el número de rectángulos ($n$) sigue aumentando, ¿a qué valor cree usted que se aproximaría la suma de las medidas de las áreas de todos ellos? Explique.<br>ii. ¿Cuántos rectángulos tendría que dibujar para llegar a dicho valor? Explique.</td></tr>
<tr><td>c. De forma general, dibuje $n$ rectángulos y determine la suma de las medidas de sus áreas. Luego, justifique su respuesta dada en el ítem b, para el número de rectángulos escrito.</td></tr>
<tr><td>Marque la casilla g(x) luego de leer el código QR y coloque $a = 0$ y $b = 4$, luego manipule el deslizador $n$.</td><td>d. El procedimiento realizado en el ítem 1(c) pero ahora utilizando la función $g$, ¿nos permitirá determinar la medida del área de la región sombreada? Justifique.</td></tr>
</table>

Las producciones realizadas por Carmen y Jacky, muestran evidencias de aprehensión perceptiva al reconocer, a posteriori, que la altura de cada rectángulo se puede determinar a partir de la imagen de la función en el extremo derecho de su base (cabe resaltar que fueron pocos los estudiantes que relacionaron la altura de cada rectángulo con la imagen de la función). Esta relación entre la altura y la imagen de la función parece que se activó en ambas estudiantes a partir de la representación de cuatro rectángulos de igual base, generado por la partición regular del intervalo [0; 4] con los números enteros positivos: 1, 2, 3 y 4, lo que facilitó que Carmen representara las alturas de los rectángulos, simbólicamente, como $f_1$, $f_2$, $f_3$ y $f_4$, así como en el caso de Jacky que representó como $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$ las alturas de los rectángulos en notación de función.

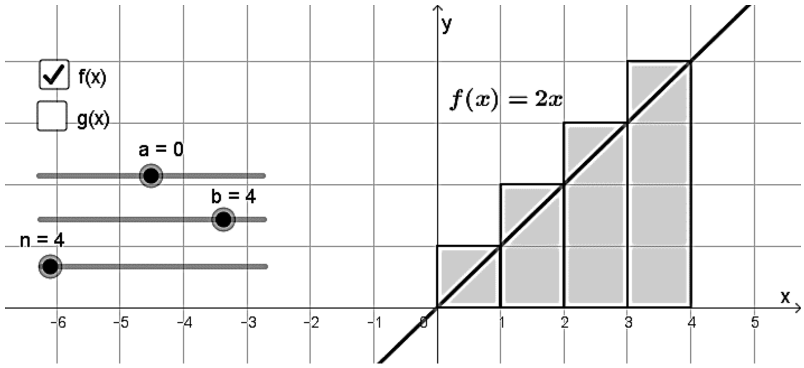



Fig. 4: Partición regular con cuatro subintervalos ($n$ = 4)

Esta relación se extendió luego para cualquier número de rectángulos, en particular $n$ = 8 y $n$ = 50. La dependencia entre la amplitud de cada base y el número de rectángulos se hace notoria en las producciones de las estudiantes, que determinaron las medidas de base solicitadas al dividir la longitud del intervalo [0; 4] entre el número de rectángulos sugerido; estos resultados, medidas de base de 0,5 u a partir de la representación de 8 rectángulos, y de 0,08 u cuando el número fue 50, así como el reconocimiento de que al aumentar el número de rectángulos la medida de cada base disminuye, son evidencias de aprehensión discursiva.

Respecto a la suma de medidas de áreas de 8 rectángulos, Carmen planteó la expresión 0,5$f$(0,5) + 0,5$f$(1) + 0,5$f$(1,5) + … + 0,5$f$(8), y Jacky escribió la siguiente suma de términos: 0,5$f$(0,5×1) + 0,5$f$(0,5×2) + 0,5$f$(0,5×3) + 0,5$f$(0,5×4) + … + 0,5$f$(0,5×8). Al comparar ambos resultados, se puede observar que Carmen cometió un error, dado que el último término de la suma debió ser 0,5$f$(4), mientras que Jacky lo hizo correctamente; sin embargo, al reducir la suma de términos utilizando la notación de sumatoria, ambas estudiantes presentaron la misma expresión, y obtuvieron el mismo resultado numérico correcto igual a 18 $u^2$ (lo mismo ocurrió cuando trabajaron con 50 rectángulos, obteniendo como suma de medidas de áreas el valor de 16,32 $u^2$). Al ser consultada por el error observado, Carmen afirmó conocer cómo hallar las alturas de los rectángulos, lo cual se evidencia en sus planteamientos, e indicó que escribió $f$(8) y $f$(50) como las alturas de los últimos rectángulos considerando solo la cantidad de término, y no el último término de una secuencia.

A partir de los esquemas de uso de Carmen y Jacky: medida del área de figuras geométricas, intervalos, funciones, y sumatorias, las estudiantes muestran evidencias de saber cómo efectuar el cálculo de la suma de las medidas de las áreas de un número finito de rectángulos mediante sumatorias (sumas de Riemann), lo que se puede interpretar como un esquema de acción instrumentada de la integral definida para el cálculo de áreas, que es un proceso previo para la instrumentación de la integral definida. A partir de este esquema, conjeturamos que Carmen y Jacky son capaces de calcular la suma de las medidas de las áreas de $n$ rectángulos representados en un intervalo [a; b], conjetura que se confirma, posteriormente, en las producciones realizadas por las estudiantes en la actividad 1c. Esta suma $S_n$, que considera rectángulos con medida de base Δx = (b-a)/$n$ y alturas $f$(Δx×$i$) para $i$:1, …, $n$, se representa de forma reducida mediante la siguiente expresión:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \times f(\Delta x \times i) \qquad (1)$$

En la actividad 1b, a priori se consideró que, al seguir incrementando el número de rectángulos y observar que cubren por exceso a una región triangular, tal como se muestra en la figura 5, los estudiantes por la aprehensión perceptiva pueden determinar que la medida del área de la región triangular es igual a 16 $u^2$, y que, por la aprehensión discursiva, pueden indicar que cuando el número de rectángulos aumenta con tendencia al infinito, la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos (sumas de Riemann) se aproximan a dicho valor. En esta actividad, los estudiantes deben movilizar esquemas de uso, tales como medida del área de figuras geométricas, sumatorias y límites.

Carmen y Jacky movilizaron el deslizador $n$ hasta que alcanzó su valor máximo de 100 (este valor máximo se colocó en el diseño del applet, de modo que se realicen ciertas conjeturas relacionadas al proceso de construcción del concepto de integral definida). Las producciones realizadas por las estudiantes, muestran evidencias de aprehensión perceptiva al reconocer, a posteriori, que la base de la región triangular mide 4 u, que su altura mide 8 u (obtenida a partir de la regla de correspondencia de la función), y que la medida del área es 16 $u^2$.

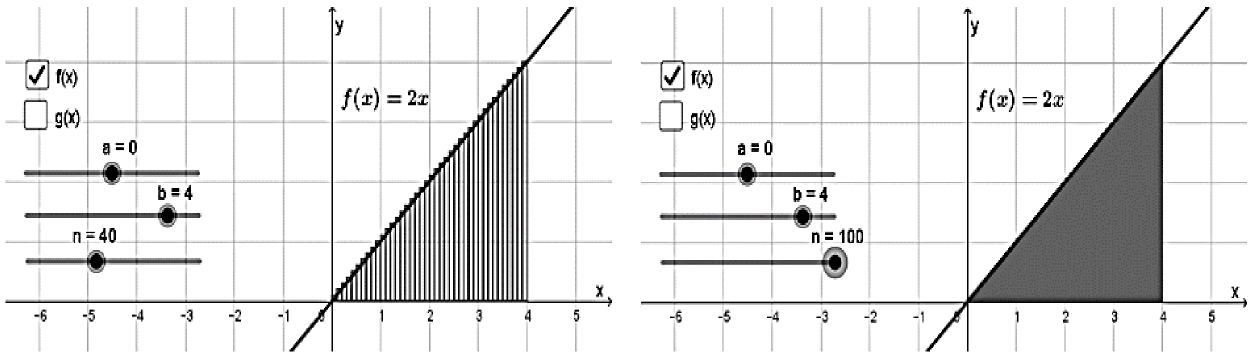



Fig. 5: Representación de 40 rectángulos ($n$ = 40) y 100 rectángulos ($n$ = 100) en la región limitada por la gráfica de $f$.

La noción de aproximación se hace notoria en la producción de Carmen, que muestra evidencias de aprehensión discursiva cuando afirma de manera intuitiva que al aumentar el número de rectángulos, la suma de las medidas de sus áreas tiende “a 16 $u^2$ porque es el área del triángulo que se forma en la función”, y que para llegar a dicho valor, el número de rectángulos debe aproximarse “a infinito porque se pueden graficar infinitos rectángulos dentro del triángulo”; del mismo modo, la noción de aproximación se pone de manifiesto en la producción de Jacky, que muestra evidencias de aprehensión discursiva cuando determina, mediante sumatorias, el valor de 16,16 $u^2$ como la suma de las medidas de las áreas de 100 rectángulos y concluye que “mientras más rectángulos el valor se aproxima a 16”, valor al que llegaría “posiblemente con 400 a 500 rectángulos”.

De ambos resultados, conjeturamos que Carmen se aproximó más hacia el concepto de integral definida, porque dejó de pensar en una suma finita de términos para dar paso a una suma infinita; en comparación con Jacky, que piensa que la suma de medidas de áreas de rectángulos llegará a 16 $u^2$ con un número finito de rectángulos. Es pertinente mencionar que al inicio Carmen presentó dudas si la suma de términos llegaría a su valor límite, por el hecho de completar una región triangular con rectángulos, duda que logró disipar al resolver la actividad 1c. En esta actividad, Carmen generó esquemas de uso, tales como medida del área de figuras geométricas, sumatorias y límites, lo cual da indicios que reconoce la noción de límite infinito subyacente al cálculo de medidas de áreas; en comparación con Jacky que no dio evidencias de haber generado el esquema límite de una suma infinita de términos.

En la actividad 1c, a priori los estudiantes, luego de haber determinado la suma de las medidas de las áreas de los rectángulos para tres casos particulares, y de generalizar dicha suma de términos para $n$ rectángulos utilizando la notación de sumatoria, se les indica que dicha suma es llamada como suma de Riemann usando puntos extremos derechos, es decir, tomar como alturas de los rectángulos a las imágenes de la función en el extremo derecho de cada base. A continuación, se espera que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos de propiedades y fórmulas de sumatoria para expresar la suma en términos de $n$, y luego, a partir de sus nociones intuitivas declaradas en la actividad 1b, apliquen el límite a dicha suma cuando $n$ tiende al infinito, y corroboren que esta tiende al valor del área de la región triangular igual a 16 $u^2$. En esta actividad, los estudiantes deben movilizar esquemas de uso, tales como medida del área de figuras geométricas, intervalos, funciones, sumatorias y límites.

Las producciones realizadas por Carmen y Jacky, a posteriori, muestran evidencias de utilizar de manera apropiada el esquema cálculo de la suma de las medidas de las áreas de un número finito de rectángulos mediante sumatorias, que en esta actividad tomó el estatus de esquema de uso, al generalizar y simbolizar la suma las medidas de las áreas de $n$ rectángulos a partir de la notación de sumatorias. A partir de los esquemas de uso de funciones y sumatorias, Carmen determinó la expresión $4/n$ para representar la base de cada rectángulo; las expresiones $f(4/n)$, $f(8/n)$, $f(12/n)$, …, $f(n)$, para representar cada una de las alturas los $n$ rectángulos, donde se observa el mismo error en el planteamiento de la altura del último término, que debió ser $f(4n/n)$; la expresión $4/n \times f(4/n) + 4/n \times f(8/n) + 4/n \times f(12/n) + \ldots + 4/n \times f(n)$, para representar la adición de medidas de áreas, arrastrando el error de la altura del último rectángulo; y por último, Carmen redujo la adición de medidas de áreas con sumatorias, y utilizó la función $f(x) = 2x$ para obtener como sumando la expresión $a_i = 4/n \times 8/n \times i$ donde el índice toma los valores $i = 1, \ldots, n$. Por su parte, Jacky planteó la sumatoria de forma directa, y escribió como sumando $a_i = 32/n^2 \times i$ para $i = 1, \ldots, n$, mostrando conocimiento de propiedades de sumatoria. Para obtener la suma de medidas de áreas en términos de $n$, ambas estudiantes utilizaron la fórmula de sumatorias:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \times (n+1)}{2} \qquad (2)$$

Carmen y Jacky lograron expresar la suma $S_n$ únicamente en términos de $n$,

$$S_n = \frac{32}{n^2} \times \frac{n \times (n+1)}{2} \tag{3}$$

Carmen aplicó el límite a dicha expresión cuando $n$ tiende al infinito y obtuvo como resultado 16, en comparación con Jacky que reemplazó $n$ por 10 000, y obtuvo como resultado de la suma 16.0016, con lo cual ambas corroboraron sus respuestas dadas en la actividad 1b. Al aplicar el proceso de aproximación de la medida del área de la región plana triangular utilizando $n$ rectángulos, las estudiantes muestran evidencias de saber cómo plantear la suma de Riemann usando puntos extremos derechos, lo que se puede interpretar como un esquema de acción instrumentada de la integral definida para el cálculo de medidas de áreas. Se distingue de ambas producciones, las acciones de Carmen que presenta evidencias de reconocer la noción de límite infinito implícito al cálculo de medidas de áreas, que le puede favorecer a la comprensión de la integral definida como el límite de una suma de Riemann, interpretado también como un esquema de acción instrumentada de la integral definida para el cálculo de medidas de áreas.

En la actividad 1d, a priori se consideró que los estudiantes, al observar la representación en el registro gráfico de la función $g$, tal como se muestra en la figura 6, por la aprehensión perceptiva reconocen que dicha función es negativa en el intervalo [0; 4], y por esa razón los rectángulos se ubican por debajo del eje X; luego de obtener un valor negativo al aplicar el límite a la suma de Riemann cuando $n$ tiende al infinito, por la aprehensión discursiva se espera que indiquen que la medida del área de una región no puede ser negativa; y para determinar la medida del área de la región sombreada, se espera que por la aprehensión operatoria de modificación posicional realicen la transformación gráfica de reflexión respecto al eje X de la función $g$, de modo que se pueda reflejar por encima del eje X a la región ubicada por debajo de dicho eje. En esta actividad, los estudiantes pueden movilizar esquemas de uso, tales como suma de Riemann usando puntos extremos derechos, límites y transformaciones gráficas.

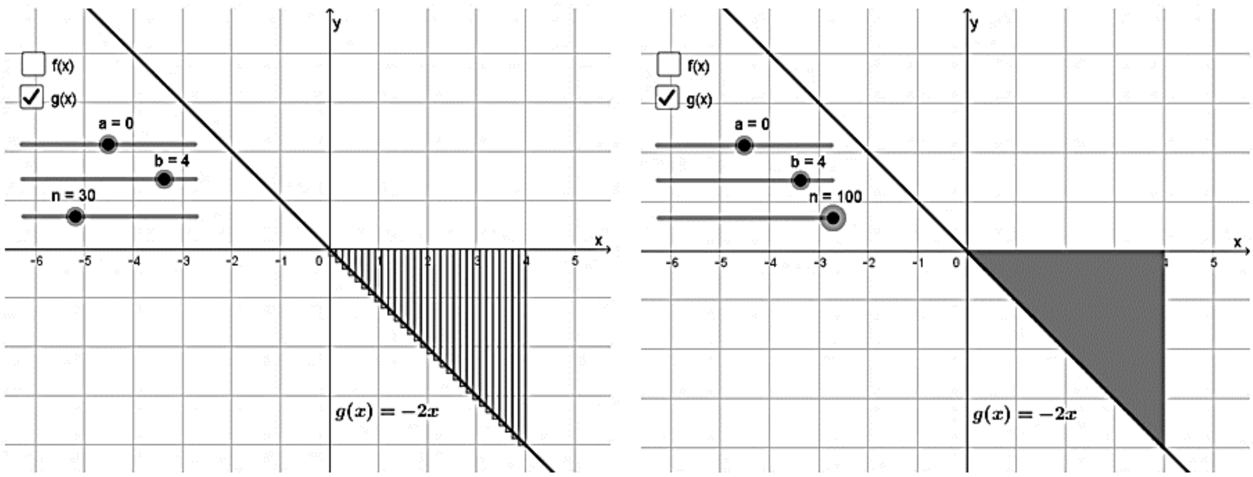



Fig. 6: Representación de 30 rectángulos ($n$ = 30) y 100 rectángulos ($n$ = 100) en la región limitada por la gráfica de $g$.

Carmen y Jacky marcaron la casilla $g(x)$ en el applet, y manipularon los deslizadores $a$ y $b$ según las especificaciones dadas. Luego de movilizar el deslizador $n$ y ver aparecer los rectángulos en el intervalo [0; 4], Carmen muestra evidencias de aprehensión perceptiva al expresar "la gráfica y los rectángulos ahora están debajo (del eje X)", sin embargo, no hizo mención sobre el valor del área que tenía que determinar. A partir del esquema de acción instrumentada: la integral definida como el límite de una suma de Riemann, Carmen planteó una sumatoria cuyo sumando $a_i = -8/n \times i$ para $i = 1, \ldots, n$, lo obtuvo al utilizar la función $g(x) = -2x$, luego aplicó fórmulas de sumatoria y obtuvo como resultado del límite el valor de -16. Las producciones realizadas por Carmen, muestran evidencias de aprehensión discursiva cuando escribe "el valor -16 no puede corresponder a un área, según la función $g(x)$ el área sale negativo y un área no es negativa". Del mismo modo, las explicaciones ofrecidas por Jacky, muestran evidencias de aprehensión discursiva al comparar lo hecho en la actividad 1c, donde determinó la suma de las medidas de áreas de 10 000 rectángulos, con esta nueva actividad y señalar "todo es igual, solo pongo menos, me saldría -16,0016, y eso no es un área".

La similitud de las regiones sombreadas, la primera ubicada por encima del eje X limitada por la gráfica de la función $f$ en el intervalo [0; 4] (trabajada en las actividades anteriores), y la segunda ubicada por debajo del eje X limitada por la gráfica de la función $g$ en el intervalo [0; 4], motivó a que Carmen y Jacky desarrollaran conjeturas que les permitiría determinar la medida del área de esta segunda región, mostrando evidencias de aprehensión operatoria del tipo modificación posicional cuando Carmen escribe “se debería llevar la función al primer cuadrante. Se podría poner el resultado en valor absoluto”, o cuando Jacky comenta “se multiplica la función por menos uno (-1) para hallar su área. (La región) se proyecta”. Estas respuestas se relacionan con el procedimiento de cálculo de medidas de áreas de regiones limitadas por la gráfica de una función negativa y el eje X, que consiste en reflejar la función negativa *g* respecto de dicho eje, de modo que la transforma a positiva generando una región simétrica a la anterior por encima del eje X, y así poder determinar la medida del área solicitada. Carmen y Jacky muestran evidencias de comprender la integral definida como la medida del área de una región limitada por la gráfica de una función positiva y el eje X, en un intervalo dado, lo que se puede interpretar como un esquema de acción instrumentada de la integral definida para el cálculo de áreas. Al finalizar la actividad 1, el investigador, con participación de los estudiantes, formalizó el concepto de integral definida como el límite de una suma de Riemann:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} \Delta x \times f(a+\Delta x \times i);\ \ \Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad (4)$$

A partir de los esquemas de utilización de la integral definida generados por los estudiantes en esta primera actividad, se espera que sean capaces de utilizarlos para distinguir si la integral definida calcula o no una medida de área. La actividad 2 permite evidenciar tal distinción, pero como se trabaja con funciones no lineales, se explicó previamente a los estudiantes cómo obtener el valor de la integral definida utilizando la calculadora, de modo que se concentren en los planteamientos y justificaciones, en lugar de procedimientos operacionales y de cálculo de sumatorias.

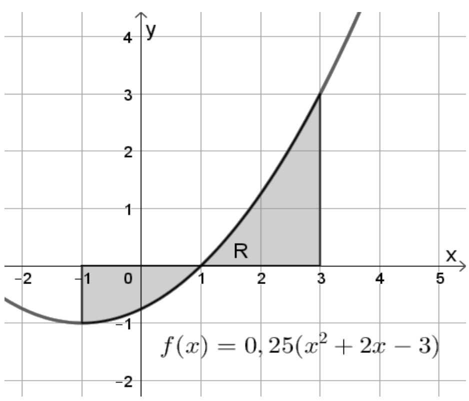
*Análisis de las preguntas de la actividad 2*

La tabla 2 muestra las preguntas de la actividad. En la actividad 2a, a priori se consideró que los estudiantes, a partir de su aprehensión perceptiva, reconocerían que la función *f* es negativa o igual a cero en el intervalo [-1; 1]; asimismo, indicarían a partir de la aprehensión discursiva que la integral de la función *f* de *x* = -1 a *x* = 1 es negativa; y, mediante la aprehensión operatoria del tipo modificación posicional, reflejarían respecto del eje X a la gráfica de la función *f* en el intervalo [-1; 1], así como a la región sombreada, determinando una nueva función positiva -*f*, de modo que luego de plantear una suma de integrales definidas obtendrían que la medida del área de la región es igual a 4 $u^2$. En esta actividad, se espera que los estudiantes movilicen el esquema la integral definida como la medida del área de una región limitada por la gráfica de una función positiva y el eje X, en un intervalo dado, que en esta actividad tomaría el estatus de esquema de acción instrumentada porque surge como resultado de la movilización de esquemas de uso en el proceso de instrumentalización de la integral definida.

Tabla 2: Preguntas de la actividad 2

*Actividad 2*

a. Explique qué procedimiento utilizaría para determinar la suma de las medidas de las áreas de las regiones sombreadas; luego, halle el valor de dicha suma.




b. Determine el valor de la integral definida e indique si dicho valor corresponde a la medida del área de una región limitada por la gráfica de una función y el eje X.

$$\int_{-2}^{4} (-0{,}5x + 1)dx$$

Las producciones realizadas por Carmen y Jacky, muestran evidencias de aprehensión perceptiva al distinguir, a posteriori, que hay dos regiones, una por encima del eje X y otra por debajo; de aprehensión discursiva al explicar que para hallar la medida del área se debe transformar la gráfica de la función en el intervalo [-1; 1], porque la integral definida de la función para dicho intervalo saldría negativa; y de aprehensión operatoria del tipo modificación posicional, cuando Carmen, luego de denominar $A_1$ a la región sombreada ubicada por debajo del eje X, y $A_2$ a la región sombreada ubicada por encima del eje X, tal y como se muestra en la figura 7, describe así su procedimiento de cálculo: "se proyecta el $A_1$ para poder hallarla y luego se halla (su área) con la función multiplicada por -1. Finalmente se halla el (área de) $A_2$ y se suman", o cuando Jacky describe así su procedimiento de cálculo "se multiplica la función por -1 aplicándolo en los valores de -1 a 1 para hallar parte del área, para obtener el área completa se le suma la integral de la $f(x)$ de 1 a 3".

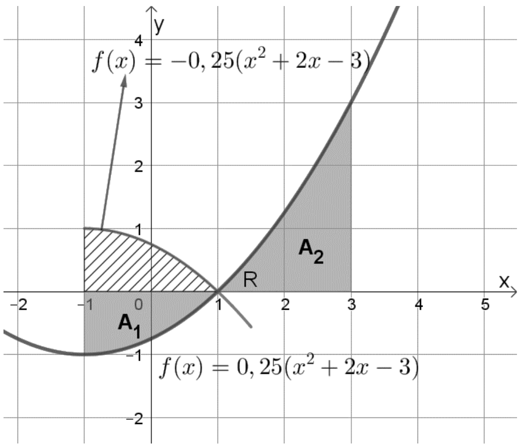



Fig. 7: Adaptación de la región simétrica representada por Carmen a la Actividad 2a

A continuación, ambas estudiantes reflejaron la gráfica de la función $f$ respecto del eje X solo en el intervalo [-1; 1], generaron la nueva función $f(x) = -0,25(x^2 + 2x - 3)$, y sombrearon la región simétrica a la región $A_1$ pero ahora por encima del eje X. Carmen y Jacky utilizaron la integral definida para hallar el valor de las medidas de área de las regiones $A_1$ y $A_2$, primero plantearon la integral definida de la función $f(x) = -0,25(x^2 + 2x - 3)$ de $x = -1$ a $x = 1$ y obtuvieron el valor de 4/3, luego plantearon la integral definida de la función $f(x) = 0,25(x^2 + 2x - 3)$ de $x = 1$ a $x = 3$ y obtuvieron el valor 8/3, sumaron ambos valores y determinaron de forma correcta la medida del área de la región igual a 4 $u^2$. Los valores de las integrales fueron hallados utilizando una calculadora científica. Al resolver la actividad de forma correcta y justificar apropiadamente sus procedimientos de cálculo, Carmen y Jacky muestran evidencias de comprender y saber utilizar la integral definida para el cálculo de áreas de regiones, por lo cual interpretamos que las estudiantes han generado esquemas de uso y de acción instrumentada que permite ver a la integral como un *instrumento* para el cálculo de áreas.

En la actividad 2b, a priori se espera que los estudiantes hallen primero el valor de la integral definida con sus calculadoras, y obtengan el valor de 3, luego, representen gráficamente a la función de modo que corroboren que sea positiva en el intervalo de análisis, a fin de justificar sus respuestas. Consideramos que los estudiantes, luego de representar gráficamente a la función e identificar que es positiva o igual a cero solamente en el intervalo [-2; 2], a partir de la aprehensión perceptiva reconozcan que la integral definida en el intervalo [-2; 4] no calcula la medida del área de una región debido a que la función es negativa en el intervalo ]2; 4].

Es probable que indiquen a partir de la aprehensión discursiva que la integral de la función $f(x) = -0,5x + 1$ de $x = 2$ a $x = 4$ es negativa, y que para determinar la medida del área de la región sombreada, mediante la aprehensión operatoria del tipo modificación posicional, reflejen la gráfica de la función $f$ (función integrando) respecto del eje X en el intervalo [2; 4], lo que permite determinar una nueva función positiva $-f$ en dicho intervalo, así como una nueva región limitada, y concluyan que la medida del área de la región limitada por la gráfica de una función $f$ y el eje X, en el intervalo [-2; 4], es igual a 5 $u^2$. En esta actividad, se espera que los estudiantes movilicen el esquema de uso la integral definida como la medida del área de una región limitada por la gráfica de una función positiva y el eje X, en un intervalo dado.

A posteriori, Carmen y Jacky primero determinaron el valor de la integral definida igual a 3, luego representaron en el registro gráfico a la función integrando $f(x) = -0,5x + 1$ en el intervalo [-2; 4] como una recta decreciente que interseca al eje X en $x = 2$, y sombrearon las dos regiones limitadas por la gráfica y el eje X en el intervalo de análisis. Carmen denominó $A_1$ a la región sombreada ubicada por encima del eje X en el intervalo [-2; 2], y $A_2$ a la región sombreada ubicada por encima del eje X en el intervalo [2; 4]; Jacky solo sombreó ambas regiones.

Las producciones realizadas por Carmen, muestran evidencias de aprehensión perceptiva cuando escribe que la integral definida no calcula la medida de un área porque "hay una parte de la región que se encuentra debajo del eje X. El (área de) $A_2$ alteraría el valor real", esto a raíz de que $A_2$ es una región ubicada por debajo del eje X; y de aprehensión operatoria del tipo modificación posicional, cuando refleja la gráfica de la función respecto del eje X solo en el intervalo [2; 4] determinando la nueva función $f(x) = -(-0,5x+1)$, y sombrea una nueva región simétrica a la región $A_2$, ubicada por encima del eje X. La respuesta de Jacky, muestra evidencia de aprehensión perceptiva cuando escribe que la integral definida "no es el área ya que para hallarla debemos hacerlo en 2 partes", se deduce de su respuesta que esto se debe a la región ubicada debajo del eje X.

Finalmente, ambas estudiantes haciendo uso de la integral definida, determinaron la medida del área de la región ubicada por encima del eje X igual a 4 $u^2$ y de la región ubicada por debajo del eje X igual a 1 $u^2$, y concluyeron que la medida del área de la región limitada por la gráfica de la función *f* y el eje X, en el intervalo [-2; 4] es igual a 5 $u^2$. Los valores de las integrales fueron hallados utilizando una calculadora científica. Al resolver la actividad de forma correcta y justificar apropiadamente sus procedimientos de cálculo, Carmen y Jacky muestran evidencias de reconocer que el valor positivo de una integral definida de una función en un intervalo dado, no necesariamente es el valor del área de la región limitada por la gráfica de dicha función y el eje X, en ese intervalo, por lo cual interpretamos que las estudiantes han generado esquemas de uso y de acción instrumentada que permite ver a la integral como un *instrumento* para el cálculo de áreas.

## DISCUSIÓN

El objetivo de la investigación fue analizar cómo estudiantes de una universidad de Lima, Perú, aprehenden el concepto de integral definida, mediado por GeoGebra, y lo utilizan como un instrumento para el cálculo de medidas de áreas de regiones limitadas por la gráfica de una función continua y el eje X, en un intervalo dado. El diseño de las actividades, compuestas por un conjunto de tareas pauteadas con el objetivo que los estudiantes razonen, realicen conjeturas e intenten validarlas, parece favorecer a la generación de esquemas de uso como medida del área, intervalos, funciones, sumatorias y límites, que a su vez posibilitaron el desarrollo de esquemas de acción instrumentada como suma de Riemann usando puntos extremos derechos e integral definida como el límite de una suma de Riemann. Por lo que estamos de acuerdo con García y Benítez (2013), que afirman que existe una relación estrecha en la manera cómo los estudiantes razonan y las características que presenta la tarea que resuelven, en donde se ponen en juego instrucciones, conocimientos previos y conceptos nuevos a desarrollar. Estas tareas deben generar un alto nivel de demanda cognitiva por parte de los estudiantes, poder ser exploradas a través de múltiples representaciones de modo que les permitan construir significados sobre el concepto estudiado, y desarrollar habilidades propias de los objetivos curriculares de los cursos de Cálculo.

Se pudo comprobar lo dicho por Rabardel (2002) que un mismo esquema puede tomar diferente estatus según la actividad dada, por ejemplo, en la actividad 1a el esquema suma de las medidas de las áreas de un número finito de rectángulos mediante sumatorias, toma el estatus de esquema de acción instrumentada, y este mismo toma el estatus de esquema de uso en la actividad 1c. La generación y movilización de esquemas por parte de los estudiantes cuando se enfrenta a una tarea dada, en particular los casos de Carmen y Jacky, parece posibilitar los procesos de instrumentación e instrumentalización de la integral definida, lo que nos permite deducir que la integral definida pasó a ser para ellas un instrumento para el cálculo de medidas de áreas de regiones.

La metodología usada para el análisis de las respuestas fue la Ingeniería Didáctica, que permitió crear la secuencia didáctica, y observar y analizar las respuestas de los estudiantes. La Ingeniería didáctica tiene una validación que es esencialmente interna. Según Artigue (2015), esta validación es basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori del registro de los estudios de caso, en nuestro estudio los casos de las estudiantes Carmen y Jacky, que culminaron a tiempo las actividades mostrando interés en el desarrollo de estas; sin embargo, evidenciamos dificultades tanto procedimentales como de interpretación en los estudiantes al trabajar una secuencia didáctica orientada al concepto de integral definida, similares a los mencionados por Boigues et al. (2010), por ejemplo al relacionar la altura de cada rectángulo con la imagen de una función, error observado en el trabajo de Carmen al determinar la altura del último rectángulo al trabajar con 8, 50 y *n* rectángulos, o cuando los autores señalan que no se relaciona el límite de las sumas de Riemann y la idea de área bajo la curva, dificultad observada en el trabajo de Jacky que evidenció la posibilidad de determinar la medida del área utilizando la suma de medidas de áreas de un número finito de rectángulos.

El uso de applets diseñados en GeoGebra permitió el estudio de la integral definida a partir de la utilización de códigos QR que pueden ser leídos desde un aplicativo del celular, esto ayudó a no depender de un laboratorio computarizado para el desarrollo de las actividades, sino que los estudiantes desde sus celulares pudieran manipular herramientas como casilla de control, para la elección entre una u otra función dada, la herramienta deslizador que permitía modificar extremos del intervalo de análisis, así como representar rectángulos de igual base que se acumulan dentro de una región. La interacción de los estudiantes con los applets al desarrollar las actividades propuestas, permitió obtener información gráfica relacionada a los procesos de partición, suma y límite, propias del estudio de la integral definida. Por ello, consideramos que el uso de los applets favorece el aprendizaje de la integral definida, lo cual concuerda con Aranda y Callejo (2017), que sostienen que el uso de applets permite a los estudiantes desarrollar una mejor comprensión de la aproximación gráfica al Cálculo, superando la visión algorítmica y analítica, al mismo tiempo que proporciona un entorno favorable para construir una red de ideas relacionadas, así como con García et al. (2020) que afirman que la integración de la tecnología favorece a la comprensión de conceptos de naturaleza dinámica.

El proceso de refinamiento de la partición del intervalo de análisis, generado al aumentar dinámicamente el número de rectángulos con el deslizador *n* del applet, cumplió un rol importante porque hizo que la noción de límite aparezca en las conjeturas de la mayoría de estudiantes, en particular de Carmen, al realizar procesos de aproximación de la medida del área en la vista gráfica del GeoGebra, que luego corroboró al aplicar el límite cuando *n* tiende al infinito a la suma de las medidas de áreas de *n* rectángulos. Por este motivo, consideramos que el uso de applets favorece al refinamiento de la partición y al surgimiento de esquemas como el de límite, lo cual coincide con Tatar y Zengin (2016), que manifiestan que el uso de applets permite visualizar cómo la suma de medidas de las áreas se convierte en el área de la región, y permite identificar cómo se genera la noción de límite en dicha suma y cómo este límite se convierte en una integral.

Es común utilizar funciones continuas y positivas para introducir el concepto de integral definida relacionado al cálculo de medida de áreas. Sin embargo, cuando la integral definida es negativa, o cuando se obtienen valores positivos de la integral definida pero no calculan la medida de un área limitada por la gráfica de una función y el eje X, se presentan dificultades para interpretar estos valores. En nuestro estudio, consideramos que el esquema de acción instrumentada la integral definida como la medida del área de una región limitada por la gráfica de una función positiva y el eje X, en un intervalo dado, fue generado por Carmen y Jacky al darse cuenta que el valor negativo de la integral definida de una función negativa en un intervalo dado no representaba la medida del área de una región. Carmen y Jacky, mediante la aprehensión operatoria del tipo modificación posicional, reflejaron dicha función negativa respecto al eje X, transformándola en positiva, reconociendo cuándo una integral definida calcula la medida de un área. Pensamos que esto significó para ellas, comprender que todo valor numérico de una integral definida no siempre representa la medida del área de una región, lo cual coincide con Camacho et al. (2008), que señalan que los estudiantes pueden diferenciar entre el cálculo de una integral definida y el cálculo de medidas de áreas utilizando integrales definidas, cuando trabajan con funciones positivas o negativas.

## CONCLUSIONES

A partir de los resultados, del análisis realizado y de la discusión presentada acerca la construcción del concepto de integral definida, sobre su interpretación y uso para el cálculo de medidas de áreas, se obtienen las siguientes conclusiones:

1) Consideramos importante la generación de nociones intuitivas al construir el concepto de integral definida a partir de un proceso dinámico, sin embargo, parece que la formalización de estas nociones intuitivas basada en procesos algebraicos y en la validación de conjeturas relacionadas al uso de la integral definida como un instrumento para el cálculo de medidas de áreas, las coordinaciones entre los registros gráfico y algebraico, así como la articulación de las aprehensiones perceptiva, discursiva y operacional en el registro gráfico, favorece a que los estudiantes puedan lograr la Génesis Instrumental de la integral definida.

2) Introducir el concepto de integral definida utilizando sumas de Riemann es pertinente por diversas razones: al brindar la oportunidad de articular esquemas preexistentes, tales como medidas de áreas, intervalos, funciones, sumatorias y límites, puede contribuir a la comprensión del concepto de integral definida y favorecer a la adquisición de nociones de cambio y de variación simultánea de los valores de dos o más cantidades, como es el caso de la suma de medidas de áreas respecto al número de rectángulos; y el razonamiento empleado al utilizar sumas de Riemann puede ser aplicado para el estudio de otros temas relacionados a la Física, Ingeniería, Medicina, Administración, entre otros, donde la suma de Riemann tenga un significado en un contexto dado.

3) La secuencia didáctica buscó contribuir a que los estudiantes modifiquen su concepción inicial sobre que la integral definida solo permite calcular medidas de áreas, a otra en donde la integral definida es un número real. El trabajo con funciones positivas o negativas en un intervalo dado, parece que brinda herramientas a los estudiantes para saber cómo utilizar la integral definida para el cálculo de áreas.

4) El diseño de actividades que permiten la interacción con GeoGebra, favorece a la apropiación del concepto de integral definida. Empezar con rectángulos de base igual a 1 u, representados en la vista gráfica del GeoGebra, permite relacionar la altura de cada rectángulo con la imagen de una función e introducir el uso de sumatorias. Consideramos a partir de la experiencia, que el uso del GeoGebra facilitó la representación gráfica de un número finito de rectángulos, que no hubiera sido sencillo realizarlo a lápiz y papel, lo cual parece favorecer a la interpretación de la información que se da en el registro gráfico y al desarrollo de la noción intuitiva de límite para, posteriormente, continuar un trabajo algebraico, con el fin de determinar la medida del área de una región, y de esta manera concebir el límite de una suma como la integral definida.

## AGRADECIMIENTOS

A la Dirección de Investigación de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas por el financiamiento al proyecto código A-142-2019, que permitió el desarrollo de la presente investigación en el área de Educación Matemática en el nivel Universitario.

## REFERENCIAS

Aranda, M.C. y Callejo, M.L., Construcción de la Función Integral y Razonamiento Covariacional: Dos Estudios de Casos, doi: 10.1590/1980-4415v31n58a13, Bolema, 31(58), 777-798 (2017)

Artigue M., *Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering*; in Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education by A. Bikner-Ahsbahs; C. Knipping y N. Presmeg, pp 467-496 Springer, Dordrecht, Netherlands (2015)

Boigues, F.J., Llinares, S. y Estruch, V.D., Desarrollo de un Esquema de la Integral Definida en Estudiantes de Ingenierías Relacionadas con las Ciencias de la Naturaleza. Un Análisis a Través de la Lógiga Fuzzy. Relime, ISSN: 1665-2436,13(3), 255-282 (2010)

Camacho, M., Depool, R. y Garbín, S., Integral Definida en Diversos Contextos. Un Estudio de Casos. Educación Matemática, ISSN: 1665-5826, 20(3), 33-57 (2008)

Dominguez, M.A., Barniol, P.J. y Zavala, G., Evaluación del entendimiento gráfico de derivada e integral definida mediante un examen en castellano de opción múltiple, http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062019000600041, Formación Universitaria, 12(6), 41-56 (2019)

Duval, R. A., Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, doi: 10.1007/s10649-006-0400-z, Journal Educational Studies in Mathematics, 61(1-2), 103-131 (2006)

Duval, R.A., *Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings*; in Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education by R. Sutherland y J. Mason, pp 142-157 Springer, Berlin, Germany (1995)

García, M.L. y Benítez, A.A., Diseño e Implementación de Tareas para Apoyar el Aprendizaje de las Matemáticas, http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062013000100003, Formación Universitaria, 6(1), 13-20 (2013).

García, M.J., Eguia, M.I., Etxeberria, P. y Alberdi, E., Implementación y evaluación de actividades interdisciplinares mediante applets dinámicas para el estudio de la geometría, http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062020000100063, Formación Universitaria, 13(1), 63-70 (2020)

Harini, N.V., Fuad, Y. y Ekawati, R., Students' Covariational Reasoning in Solving Integrals' Problems, doi :10.1088/1742-6596/947/1/012017, Journal of Physics, 947, 1-7 (2018)

Jones, S.R., The Prevalence of Area-under-a-curve and Anti- derivative Conceptions Over Riemann Sum-based Conceptions in Students' Explanations of Definite Integrals, doi: 10.1080/0020739X.2014.1001454, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46 (5), 721-736 (2015)

Kouropatov, A. y Dreyfus, T., Learning the Integral Concept by Constructing Knowledge About Accumulation, doi:10.1007/s11858-014-0571-5, ZDM Mathematics Education, 46 (4), 533-548 (2014)

Rabardel, P., People and Technology: A Cognitive Approach to Contemporary Instruments. ⟨hal-01020705⟩. Université Paris 8, Paris, France (2002)

Sealey, V., A Framework for Characterizing Student Understanding of Riemann Sums and Definite Integrals, doi: 10.1016/j.jmathb.2013.12.002, Journal of Mathematical Behavior (33), 230-245 (2014)

Tatar, E., y Zengin, Y., Conceptual Understanding of Definite Integral with GeoGebra, doi:10.1080/07380569.2016.1177480, Computers in the Schools, 33 (2), 120-132 (2016)