

## **Diseño a Rigidez de Árboles Escalonados mediante Mathematica®: Un trabajo no Presencial en el ámbito del EEES**

**Juan C. Pérez-Cerdán, M. Lorenzo-Fernández y J.A. Cabezas Flores**  
Universidad de Salamanca, Departamento de Ingeniería Mecánica, ETSII,  
Avda. Fernando Ballesteros 2 37700 Béjar, Salamanca-España (e-mail: juha@usal.es)

*Recibido Nov. 05, 2012; Aceptado Ene. 10, 2013; Versión final recibida Ene. 22, 2013*

---

### **Resumen**

Se presenta una aplicación basada en Mathematica® que permite, de forma fácil y rápida, calcular y diseñar a rigidez árboles rectos de sección circular escalonada. El programa desarrollado realiza el análisis de las deformaciones por flexión y por torsión a través de toda la longitud del árbol, y el diseño a rigidez introduciendo las condiciones límite sobre el valor de la flecha y el ángulo girado. La idea de esta aplicación se enmarca en el diseño de nuevas actividades en el proceso enseñanza aprendizaje exigido por el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). La aplicación consiste en una programación abierta con la que el propio estudiante puede interactuar. El diseño y puesta en marcha de este tipo de actividades permite, además, transitar hacia un sistema de evaluación basado fundamentalmente en la adquisición de competencias.

*Palabras clave: educación no presencial, enseñanza virtual, árboles escalonados, diseño a rigidez*

## **Stiffness Design of Stepped Shafts by means of Mathematica®: A non-presence Work within the EHEA framework**

### **Abstract**

An application based on the software Mathematica® for calculating and stiff designing in an easy and quick manner straight shafts of stepped circular cross section. The proposed software performs the analysis of deformations generated by bending and torsion loading throughout the entire length of the shaft, and the stiffness design introducing the maximum admissible values for deflection and angle of twist. The idea of this application was implemented in the context of the European High Education Area (EHEA). The application consists of an open programming with which the students can interact. The design and implementation of these types of activities allows moving towards an evaluation system based essentially on skills acquisition.

*Keywords: non-presence teaching, virtual learning, stepped shafts, stiffness design*

## INTRODUCCIÓN

La adaptación de los nuevos títulos al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) está suponiendo uno de los retos más complejos a los que se han enfrentado las universidades en su historia reciente. La Declaración de Bolonia (1999) y el proyecto "Tuning Educational Structures in Europe" (Zoller, Ch. et al., 2005) han establecido los objetivos que marcan este proceso: armonización en la estructura, transparencia, comparabilidad y compatibilidad de los Sistemas de Educación Superior, aseguramiento de la calidad, implantación de un sistema de créditos basado en el trabajo del estudiante, uso de un lenguaje común en base a las competencias, etc. Pero además, exige actuar en una serie de ámbitos -metodologías didácticas, sistemas de evaluación o diseño de nuevas actividades- que, en su conjunto, modificarán de manera notable la interacción profesor/estudiante y el sistema de aprendizaje en el ámbito universitario.

En este contexto, aquí proponemos el diseño a rigidez de ejes escalonados como actividad no presencial y desarrollamos un programa escrito en Mathematica® que sirve de apoyo a dicha actividad. Muchos textos actuales de diseño de máquinas incluyen software de propósito general basado en Microsoft Excel (Spotts y Shoup, 1999), TKSolver (Norton, 1999) o hacen uso del lenguaje BASIC (Mott, 1992) para el análisis matemático de elementos de máquinas. Por otra parte, durante los últimos años, se ha extendido el uso de Mathematica® al análisis y resolución de problemas en ingeniería mecánica utilizando el método de los elementos finitos (ver, por ejemplo, Bhatti, 2005) y al cálculo de máquinas y mecanismos (Hernández, 2002; Marghitu y Raju, 2009). Carta et al. (1999) han desarrollado un completo programa para el diseño y cálculo de ejes utilizando Visual Basic. Sin embargo, aquí presentamos una programación abierta (no en formato "caja negra") con la que el propio estudiante puede interactuar introduciendo mejoras o nuevos objetivos en el cálculo.

De hecho, al estudiante se le propone efectuar el diseño a rigidez del eje como actividad no presencial, y utilizar el programa para cotejar paso a paso los resultados de su cálculo o para verificar a posteriori sus resultados. Además, se trata de un cálculo a rigidez, y no a resistencia, que suele ser lo habitual en las aplicaciones señaladas. Desde el punto de vista del cálculo, el programa, llamado DIAR, realiza el análisis de las deformaciones por flexión y por torsión a través de toda la longitud del árbol, y el diseño a rigidez introduciendo ad hoc las condiciones límite sobre el valor de la flecha y el ángulo girado.

## DISEÑO A RIGIDEZ DE EJES ESCALONADOS: UNA ACTIVIDAD NO PRESENCIAL

El Diseño de Máquinas requiere un bagaje teórico y matemático relativamente complejo, por lo que resulta ser una materia apropiada para idear y desarrollar actividades de carácter no presencial, como resolución de problemas, realización de trabajos, etc. En este sentido, y dentro de un programa de cambio metodológico más ambicioso, el diseño a rigidez de ejes escalonados se ha propuesto como actividad no presencial durante los dos últimos cursos en la asignatura de Diseño de Máquinas (6 créditos LRU) de Ingeniería Industrial. En el nuevo Título de Grado (que, en la ETSII de la Universidad de Salamanca (USAL), ha comenzado en el curso 20010/2011) se incluye una asignatura con el nombre de Diseño y Cálculo de Máquinas, que cuenta con 6 créditos ECTS. Aún tratándose de dos asignaturas que pueden diferir parcialmente en sus contenidos, pensamos que las experiencias que de este proyecto se derivan serán fácilmente llevadas a la práctica en aquel contexto, la enseñanza de Grado, para el que finalmente han sido pensadas.

Los ejercicios propuestos como actividad no presencial permiten, además, introducir componentes en la evaluación que den cuenta del trabajo y logros del estudiante a lo largo del curso (evaluación continua). Evidentemente, también es un objetivo primordial desarrollar las competencias específicas de la asignatura, conocimientos y capacidad para el cálculo, diseño y ensayo de máquinas, y potenciar otras competencias transversales como son la resolución de problemas y la capacidad de análisis y síntesis. Está claro que, al tiempo que introducen nuevos procedimientos de evaluación continua, se persigue establecer una nueva metodología basada en la adquisición de competencias.

La actividad se realiza en grupos de 2 alumnos, y cada pareja debe analizar y resolver un árbol diferente. Se valora hasta 0.5 puntos en la calificación final. En la plataforma Moodle (a través del Campus Virtual Studium de la USAL) se ha introducido información online que sirve de guía al estudiante en el diseño del árbol. Dicha ayuda incluye contenidos teóricos y la resolución completa de un ejemplo como se muestra en la Fig. 1.

**Diseño a rigidez a un eje escalonado**

**Ejemplo-guía**

- eje de acero AISI 1035 laminado en caliente, mecanizado
- polea P → diámetro de 25 cm y masa 15 kg, las tensiones de la correa están en la relación  $T_1 = 2.5T_2$
- engranaje G → diámetro primitivo de 25 cm y masa 15 kg, tiene un ángulo de presión de  $20^\circ$
- transmite 10 CV de potencia de la polea P al engranaje G a 900 r.p.m.
- hombros de 1.5 mm de radio

Obtener el diámetro del eje con un coeficiente de seguridad de 1.5 mediante un **diseño a rigidez**

Fig.1. Captura de imagen del Campus Virtual Studium de la USAL. Se muestra el ejemplo-guía que sirve de ayuda online para el diseño a rigidez de árboles escalonados como actividad no presencial.

## ESTRUCTURA DEL PROGRAMA DESARROLLADO EN MATHEMATICA®

Los ejes de transmisión constituyen el componente esencial de un buen número de máquinas y su diseño puede considerarse una aplicación directa de los fundamentos del cálculo de elementos de máquina y de las técnicas que permiten determinar deformaciones (ecuación diferencial de la elástica, método área-momento, etc.). Utilizando el lenguaje de cálculo avanzado que ofrece Mathematica®, se ha desarrollado un programa que efectúa el diseño a rigidez de árboles escalonados. El programa, llamado DIAR, permite a los estudiantes verificar los resultados de la actividad no presencial que, con el mismo objetivo, se propone en la asignatura de Diseño de Máquinas, como hemos señalado en el apartado anterior.

El programa, que realiza el análisis de las deformaciones por flexión y por torsión a través de toda la longitud del árbol, y el diseño a rigidez introduciendo las condiciones límite sobre el valor de la flecha y el ángulo girado, está estructurado en varias etapas que muestra el diagrama de la Fig. 2.

### *Entrada de datos y cálculo de la rigidez*

El dato clave que se introduce en esta primera etapa es el número de tramos en que se divide la longitud total del árbol. Se inicia un nuevo tramo siempre que se aplica una carga, existe un apoyo o cambia la sección del eje. Otros datos son la longitud del eje, el módulo de elasticidad,  $E$ , y el coeficiente de seguridad. También se calcula la rigidez a flexión en cada tramo en función de la rigidez del primer tramo,  $(EI)_1$ , donde el momento de inercia  $I_1$  depende del diámetro  $d_1$  que, obviamente, es el parámetro de diseño. Los datos se introducen mediante cuadros de diálogo como el que muestra la Fig. 3.

### *Verificación o diseño*

El programa efectúa el diseño a rigidez de un árbol cuya sección es constante a tramos, para lo cual debe introducirse la relación entre los diámetros en cada tramo del mismo. Pero también ofrece la posibilidad de realizar la verificación de un diseño cuando son conocidos los diámetros. El cuadro que permite elegir entre una u otra opción se muestra en la Fig. 3.

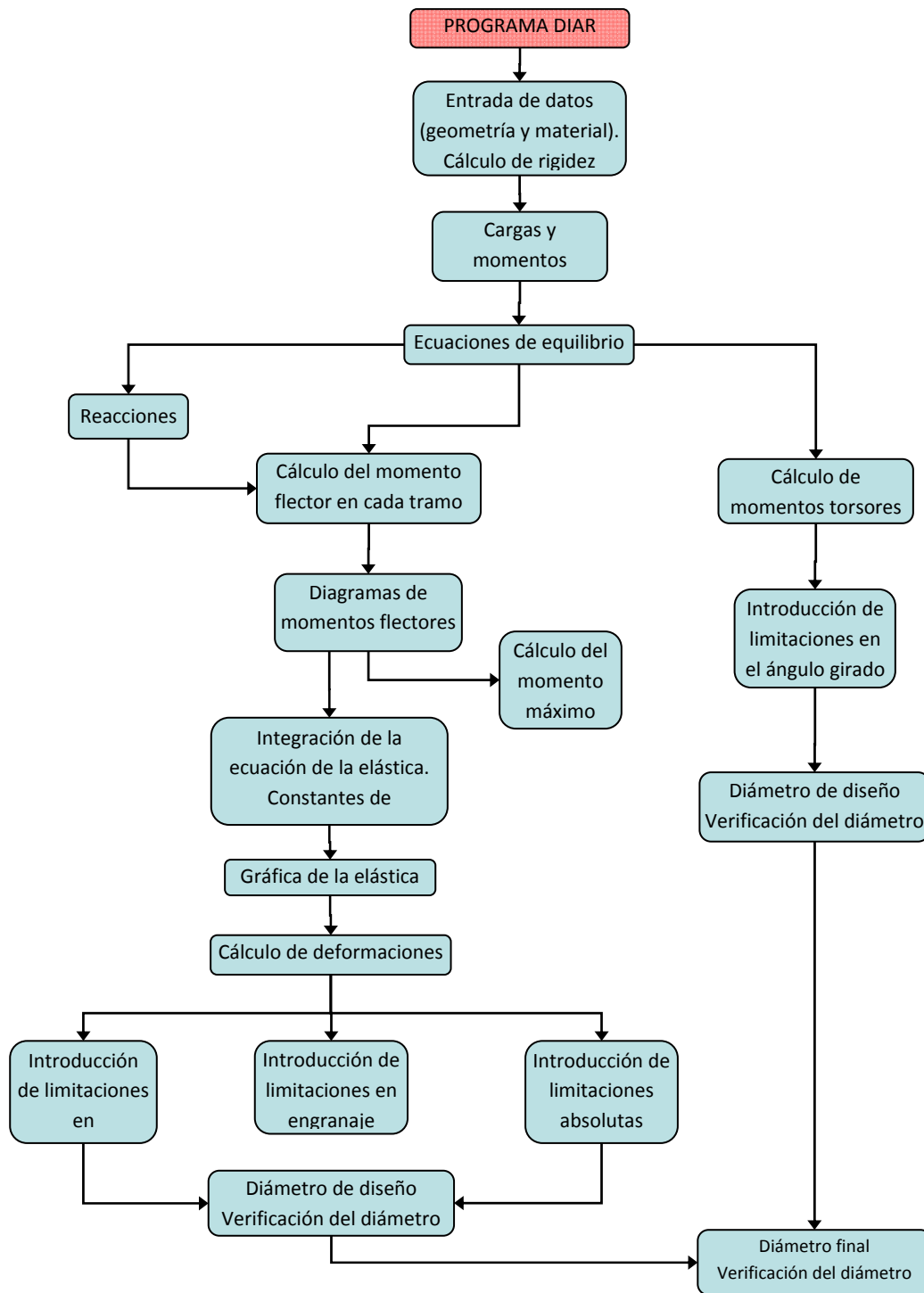


Fig. 2. Diagrama que muestra las etapas del proceso de cálculo del programa DIAR.

*Cargas y momentos aplicados*

En esta sección se introducen las cargas puntuales, cargas uniformemente distribuidas y momentos aplicados en dos direcciones perpendiculares (ejes coordenados  $y$  y  $z$ ). Se utiliza el convenio de signos de Vázquez (2000). Cada tipo de carga se introduce en forma de lista; la posición en la lista indica el punto del eje (inicio de un tramo) en el que se aplica.

*Ecuaciones de equilibrio. Resolución de las ecuaciones de equilibrio*

En esta etapa el programa establece y resuelve las ecuaciones de equilibrio en los ejes coordenados  $y$  y  $z$ . Como resultado, se obtienen los valores de las reacciones en los apoyos.

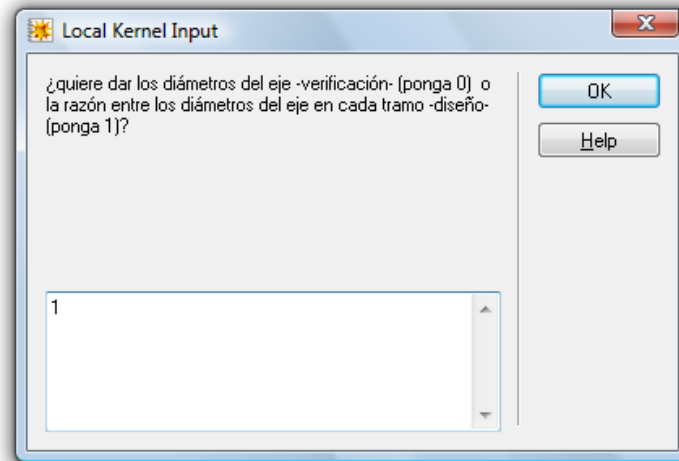


Fig. 3. Cuadro de diálogo para la entrada de datos. El que se muestra en la figura permite elegir entre un cálculo de diseño o de verificación.

#### *Cálculo del momento flector. Diagramas de momentos*

Se determina la variación de los momentos flectores  $M_y$  y  $M_z$  en cada tramo del árbol y se representa en forma de diagramas como el que se muestra en la Fig. 4. Se hace lo propio con el momento total,  $M$ .

#### *Cálculo del momento máximo*

Conocidas la variación del momento a lo largo del eje, el programa calcula su valor máximo y ofrece la posibilidad de calcular su valor en cualquier sección.

#### *Ecuación de la elástica. Constantes de integración*

La elástica en los planos  $xy$  y  $xz$  se calcula por doble integración a partir de las ecuaciones diferenciales correspondientes. Puesto que el diámetro  $d_1$  es desconocido y, por tanto, también la rigidez, en el primer tramo del eje dichas ecuaciones se escriben como:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -M_z \qquad \frac{d^2 z_1}{dx^2} = -M_y \qquad (1)$$

En cualquier otro tramo  $i$  aparece entonces un factor que depende de la relación entre los diámetros

$$\left(\frac{d_i}{d_1}\right)^4 \frac{d^2 y_i}{dx^2} = -M_z \qquad \left(\frac{d_i}{d_1}\right)^4 \frac{d^2 z_i}{dx^2} = -M_y \qquad (2)$$

De integrar en cada tramo resultan dos constantes de integración, que el programa calcula a partir de las condiciones de contorno. La ecuación de elástica permite conocer los valores de las deformaciones  $\delta_y$  y  $\delta_z$ , definidas salvo un factor  $1/(EI)_1$  si el problema es de diseño, o directamente la flecha  $\delta$  o el ángulo girado  $\theta$  si se trata de verificación, en cualquier sección del eje.

#### *Gráfica de la elástica*

En esta sección se dibujan las gráficas de la elástica en los planos  $xy$  y  $xz$  –en la forma que se muestra en la Fig. 5- y la elástica en las tres dimensiones. Nótese que el valor de la flecha viene afectado por el factor  $(EI)_1$ , por tratarse un cálculo de diseño.

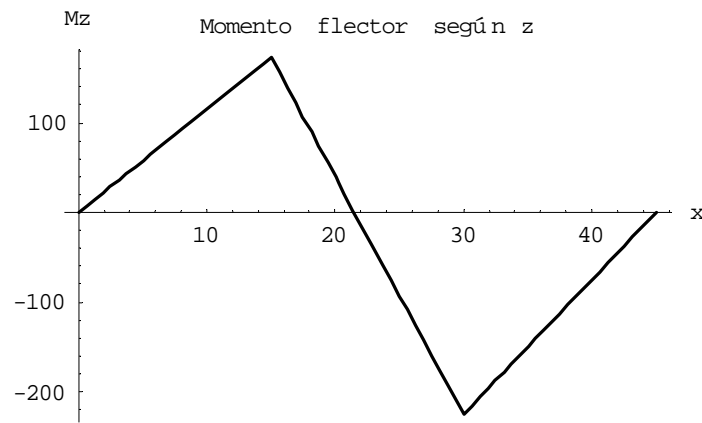


Fig. 4. Forma en que el programa DIAR representa el diagrama de momentos flectores  $M_z$ .

#### Cálculo de deformaciones por flexión

Se introducen las condiciones sobre el ángulo girado por flexión,  $\square_L$ , o sobre la flecha,  $\square_L$ , de acuerdo con las limitaciones establecidas por distintos autores [Faires, 1970; Deutschman et al., 1989; Shigley y Mischke, 1990]. Dichas limitaciones establecen los valores máximos admisibles sobre la longitud total del eje, o en las secciones donde se sitúan los rodamientos o se montan engranajes. A partir de las expresiones para el diámetro:

$$d = 4 \sqrt[4]{\frac{64(EI\delta)}{E\pi\delta_L}} \quad d = 4 \sqrt[4]{\frac{64(EI\theta)}{E\pi\theta_L}} \quad (3)$$

y sobre la condición que da lugar a un mayor diámetro se efectúa el diseño a rigidez del árbol por flexión (o, en su caso, se verifica la validez del diámetro propuesto).

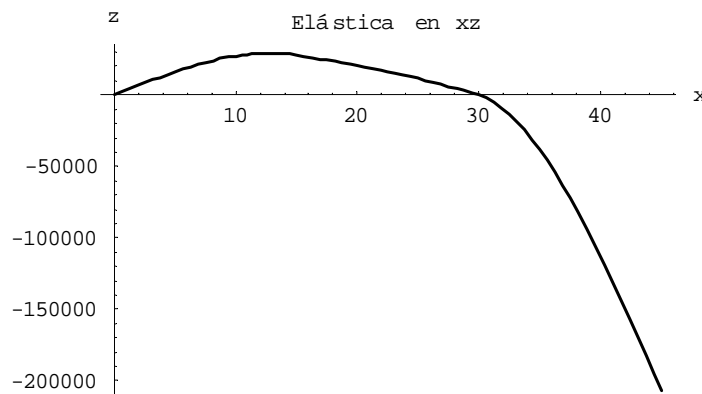


Fig. 5. Ejemplo de gráfica de la elástica en un caso de diseño. El valor de la flecha viene multiplicado por el valor de la rigidez el primer tramo del árbol,  $(EI)_1$ .

#### Diseño a rigidez por torsión

Se trata de un cálculo semejante al de flexión descrito en los apartados anteriores. Se calculan los momentos torsores, y se introducen las condiciones sobre el ángulo girado por torsión de acuerdo con las limitaciones establecidas por distintos autores [Faires, 1970; Deutschman et al., 1989]. Se obtiene así el correspondiente diámetro de diseño.

Evidentemente, se toma como diámetro final de diseño el menor de los calculados.

#### Otras secciones del programa

El programa también permite calcular los esfuerzos normales por flexión y los tangenciales por torsión. Cuenta, además, con otro módulo que permite calcular las velocidades críticas según la ecuación de Rayleigh a partir de los pesos de los elementos montados sobre el árbol.

## CONCLUSIONES

Haciendo uso de las capacidades de cálculo que ofrece Mathematica®, se ha desarrollado un programa que efectúa el diseño a rigidez de árboles escalonados. El programa permite a los estudiantes verificar los resultados de una actividad no presencial que, con el mismo objetivo, se propone en Diseño de Máquinas. Aunque la práctica docente se ha llevado a cabo sobre estudiantes de Ingeniería Industrial, la experiencia adquirida facilitará la implementación tanto de actividades basadas en lenguajes de alto nivel como la puesta en marcha de otras actividades no presenciales en el título de Grado de acuerdo con los cambios metodológicos exigidos por la adaptación al EEES.

## REFERENCIAS

- Zoller, Ch. et al., *Tuning Educational Structures in Europe*, Informe Final, Fase I, Editores: Julia González y Robert Wagenaar, Universidad de Deusto, Bilbao (2003).
- Spotts, M. F. y Shoup, T. E., *Elementos de Máquinas*, Ed. Prentice-Hall, México (1999).
- Norton, R. L., *Diseño de Máquinas*, Ed. Prentice Hall, México (1999).
- Mott, R. L., *Diseño de Elementos de Máquinas*, Ed. Prentice Hall, México (1992).
- Bhatti, M. A., *Fundamental Finite Element Analysis and Applications with Mathematica® and Matlab® Computations*, Ed. John Wiley and Sons, New Jersey, EEUU (2005).
- Hernández, V. y otros cuatro autores, *Aplicación de Mathematica® a la Simulación de Robots*, Anales de Ingeniería Mecánica, 14(1), 573-576 (2002).
- Marghitu, D. B. y Raju, P. K., *Mechanism analysis with Mathematica®*, International Journal of Mechanical Engineering Education, 37(2), 130-143 (2009).
- Carta, A., Lorenzo, J., Yáñez, A. y Martel, O., *Software para el diseño de árboles de sección circular*, Actas del IV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, Santiago de Chile (1999).
- Vázquez, M., *Resistencia de Materiales*, Ed. Noela, Madrid (2000).
- Faires, V. M., *Diseño de Elementos de Máquinas*, Ed. Montaner y Simón, Barcelona (1970).
- Deutschman, A. D., Michels, W. J. y Wilson, Ch. E., *Diseño de Máquinas: Teoría y Práctica*, Ed. C.E.C.S.A., México (1989).
- Shigley, J. E. y Mischke, Ch. R., *Diseño en Ingeniería Mecánica*, Ed. McGraw-Hill, México (1990).

