

La Secuencia de Fibonacci y el Número de Oro en Ingeniería Eléctrica y Análisis Numérico

Carlos Figueroa⁽¹⁾, Lamberto Castro⁽²⁾, Jesús R. Fox⁽²⁾, Manuel Lozano⁽²⁾

(1) Universidad de Sonora, División de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Industrial, Unidad Regional Centro Av. Rosales y L. Encinas, Col. Centro. CP. 83500. Hermosillo, Sonora, México.
(e-mail: cfigueroa@industrial.uson.mx)

(2) Universidad de Sonora, División de Ciencias e Ingeniería, Departamento de Física, Matemáticas e Ingeniería, Unidad Regional Sur. Lázaro Cárdenas No. 100. C.P. 85880, Navojoa, Sonora, México

Recibido Sep. 12, 2012; Aceptado Nov. 08, 2012; Versión final recibida Ene. 10, 2013

Resumen

El presente artículo pretende desarrollar soluciones alternativas a dos diferentes problemas que contienen la razón áurea: 1) en un circuito eléctrico con infinitas resistencias óhmicas se presenta una solución inductiva mediante la secuencia de Fibonacci y se corrobora además el resultado usando fracciones continuas; y 2) en la formulación newtoniana para el diseño de un cono truncado de mínima resistencia aerodinámica se propone una solución numérica para probar la bondad del modelo. Ambos ejercicios tienen poder didáctico en asignaturas como ingeniería eléctrica, mecánica vectorial, análisis numérico y álgebra superior. El trabajo representa una ayuda en el estudio de temas asociados al logro de habilidades matemáticas.

Palabras clave: razón áurea, serie de Fibonacci, escalera semi-infinita, resistencia aerodinámica.

The Fibonacci Sequence and the Golden Section in Electrical Engineering and Numerical Analysis

Abstract

This article claims to develop alternative solutions to two different problems which contain the golden section: 1) in an electrical circuit with infinite ohmic resistances this paper provides an inductive solution by Fibonacci sequence and results are corroborated using continue fractions; and 2) in the design of a frustum of a cone with minimum aerodynamic resistance a numerical solution is proposed to check the goodness of the model. Both exercises have didactic power on subjects such as electrical engineering, vectorial mechanics, numerical analysis and advanced algebra. This paper represents a contribution to the study of subjects associated to improve mathematical skills.

Keywords: golden section, Fibonacci sequence, semi-infinite ladder, aerodynamic resistance.

INTRODUCCIÓN

Existe en la ciencia contemporánea una corriente de investigaciones sobre la secuencia de Fibonacci y la razón áurea. Sus principales manifestaciones son el foro: *International Conference on Fibonacci Numbers* y la revista *The Fibonacci Quarterly*; además se dispone en la literatura especializada de un conjunto de trabajos, donde muchos han producido grandes hazañas científicas de la física y las matemáticas –ejemplo de ello es la relación con la dimensión fractal de Mandelbrot, o la fracción continua de Ramanujan–. En el tema de sus aplicaciones, uno de los autores más entusiastas es Stakhov (2005), menciona en forma específica su uso en ciencia e ingeniería.

Stakhov, establece y justifica un nuevo enfoque que denomina matemáticas armónicas, incluye teoría de números, teoría de funciones hiperbólicas basada en números de Fibonacci, asimismo de matrices áureas; pero lo más interesante, él señala que esa nueva teoría es la fuente de creatividad en botánica, biología, ciencias de la computación, ingeniería de sistemas en comunicación, educación en matemáticas y en la teoría de física de altas energías de partículas. Pero independientemente de las consideraciones de Stakhov, se han generado abundantes resultados históricos como geometría de objetos áureos, cuaterniones, números complejos y por supuesto, la dimensión fractal. Objetos como las muñecas matriuskas, que encajan una dentro de otra, ejemplifican los fractales; el matemático Benito Mandelbrot acuñó el término el año de 1975, que constituye un concepto capital en la geometría, y en sistemas extremadamente irregulares conocidos como caos. Los fractales representan un intento extraordinario para describir las formas del mundo real, Livio (2006). A continuación se describe su relación con el número de

oro representado usualmente como $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

La relación entre número de sub-objetos n , el factor de reducción f y la dimensión D es

$$n = \left(\frac{1}{f}\right)^D \tag{1}$$

Walser Hans (2001) presenta la relación entre naturaleza y los fractales; además a partir de la construcción de un árbol áureo, determina su dimensión que resulta 1.4404, es decir no es un entero, sino un número

irracional. Para el árbol áureo $f = \frac{1}{\phi}$ se satisface la condición $2 = \phi^D$, entonces es fácil ver que

$$D = \frac{\log 2}{\log \phi} \approx 1.4404 \tag{2}$$

Además Walser mediante una geometría áurea ilustra rectángulos, otros polígonos, elipses, poliedros y las relaciones trigonométricas generadas ahí.

Los cuaterniones son los números hipercomplejos que significan salir del plano complejo y construir el espacio 3D complejo, hecho que genera nuevas álgebras como la de Clifford. Serpil Halici, (2012), señala la existencia de los cuaterniones de Fibonacci. Es decir, existen relaciones de la variable compleja con secuencia de Fibonacci.

Algunos matemáticos consideran a la razón áurea parte de una familia de números con propiedades comunes, por ejemplo, tienen similitudes al demostrar matemáticamente su irracionalidad, usando cálculo infinitesimal, Huylebrouck (2001); son los denominados números metálicos o POEM, que significa *Pth Order Extreme Mean*. Irracionales distinguidos de ese conjunto son el número de Euler e , zeta de Riemann ζ y

π . De los números metálicos se tiene el de plata $1 + \sqrt{2}$ y el de bronce $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$, que surgen de una forma

de generalizar la secuencia de Fibonacci. Como irracionales que son, se pueden representar en fracciones continuas infinitas; a principio del siglo XX, Srinivasa Ramanujan encontró una expresión que incluye ϕ , e y π tal que

$$\sqrt{2 + \phi} - \phi * e^{2\pi/5} = 1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \dots}}} \tag{3}$$

Por otro lado, en el mundo de física la relación con ciertos fenómenos es abundante. Por ejemplo, en los estudios de los procesos de desintegración, que van de sistemas de equilibrio a no equilibrio, como puede ser el caso de decrecimiento de poblaciones, desintegración de rocas, o devaluaciones de moneda, se formulan con un mecanismo llamada *cumulative diminutions*, tal como lo señalan Buyukkhc y Dimirhan (2008); ellos en su trabajo utilizan los llamados conjuntos de Cantor, que conducen a una dimensión fractal. Dicho método, conforma una teoría que probó su utilidad en física de altas energías.

En cosmología y astronomía se menciona el número de oro en la estructura del universo, la magnitud del sistema solar y de los anillos de Saturno, Bennett (1999). También se reporta en la relación de los radios de la tierra y el sol entre otros. En mecánica cuántica se tiene presente en la relación de frecuencias de un par de osciladores armónicos como lo demuestra Bleher (1990). También en física del estado sólido y cristalografía, se han encontrado materiales como el manganeso de aluminio, con estructuras moleculares un tanto ambiguas, que no son amorfas ni periódicas, son los llamados cuasi-cristales; estos tienen su explicación física en un modelo matemático con base a una configuración áurea, tales como los mosaicos de Penrose, Livio (2006). Por otro lado también se ha comprobado su presencia en el factor de Landé del magnetismo. A continuación se explica el caso de estructuras *hidden* llamado grupo E8.

En magnetismo hay trabajos como el de Affleck (2010) y Coldea (2010) que reportan la razón dorada en materiales magnéticos compuestos, ya que en una colección de partículas de estados ligados la masa es reducida. El cálculo de estados relativistas incluye rotaciones cercanas a la velocidad de la luz dada en términos de $E = mc^2$. Dado que amerita un análisis relativista, determinar la razón de masas es un problema mayor. Una alternativa es mediante métodos de teoría cuántica de campos. En sistemas de baja dimensionalidad existen soluciones exactas. Coldea reporta resultados de un experimento con el material cobalto de niobato $C_0Nb_2O_6$ donde hay una razón de masas en términos del número de oro. Estas se relacionan a las estructuras llamadas E8 (*hidden*), una de las más excepcionales e interesantes de los llamados grupos de Lie. El experimento de Coldea demostró la relación de masas de dos cuasipartículas de baja energía del cobalto de niobato, se aproximan a la razón áurea. El experimento corroboró los resultados del cálculo con base a cuántica de campos y considerando un sistema de una dimensión, se determinó solución exacta.

Sin embargo, existen autores como Falbo (2005) y Markowsky (1992), ellos tienen un punto de vista diferente pues dudan de las cualidades desmesuradas asignadas al número de oro. Aquí hay declaraciones como la de Markowsky que dice: "generalmente las propiedades matemáticas son correctamente declaradas, pero muchas veces las presentadas en arquitectura, literatura y estética son falsas o engañosas". Dice que se ha forjado varios mitos que se repiten muchas veces, y señala errores en la historia del número de oro, además como ciertos patrimonios arquitectónicos y artísticos como la gran pirámide de Egipto, el Partenón de Grecia, o el edificio de la ONU en Nueva York, pinturas de Leonardo Da Vinci, no exhiben dimensiones áureas. Asimismo Falbo se refiere a una especie de "culto" al número de oro. También demuestra como en ciertos casos, la afirmación de que la proporción de oro tiene un lugar especial entre los números, aunque como una descripción válida de la naturaleza no es compatible. Además, refuta la idea de que se presenta con frecuencia en el arte y arquitectura. Por ejemplo, al tomar medidas, encuentra que no hay ninguna base para decir que el número de oro se reproduce naturalmente en las conchas marinas. En particular, no hay ninguna base para afirmar que se presente en los nautilus. También discute su desacuerdo con Mario Livio de que la razón áurea es "El número más asombrosos del mundo."

Sin embargo, el tema puede ser plausible si se remite al trabajo de Stakhov, donde lo correcto es pensar en la serie de Fibonacci como un principio general que pueda abrirse a aplicaciones tecnológicas concretas y específicas. Nuestro trabajo trata dos problemas que pueden ayudar en la enseñanza de las matemáticas y de la física, además de tener efectos tecnológicos. Se sabe que una escalera semi-infinita de resistencias en serie y en paralelo, tiene aplicación en metrología digital; y con respecto a estudios de resistencias aerodinámicas, se efectúan en la industria automotriz y aeroespacial.

Primeramente se analiza un popular ejercicio de textos de física llamado el problema de circuitos eléctricos tipo escalera, o también la escalera semi-infinita de resistencias. Dicho caso es tratado en infinidad de libros como por ejemplo el de M. Alonso y E. Finn (1967), y el de problemas para olimpiadas de física (2007). También en la literatura especializada se tienen los trabajos de Wörner (1999) cuyo trabajo usa fracciones continuas, además de determinar en forma elegante los voltajes de todo el circuito. Asimismo Sanjinés (2010) presenta soluciones utilizando la representación matricial de la frecuencia de Fibonacci y el cálculo de eigenvalores. Ambos trabajos constituyen formas novedosas de resolver el mismo problema. Aquí nuestra tarea para el circuito con infinitas resistencias en serie y paralelo agrega un análisis inductivo con base a la serie de Fibonacci, asimismo se puede comparar esa solución con las fracciones continuas usadas por Wörner.

Enseguida, con base a los trabajos de Cruz et.al. (2010), donde se determina el cono truncado áureo de mínima resistencia aerodinámica aplicando una solución algebraica, se presentan sus principales resultados mismos que requieren un análisis previo, pues los trabajos de ese grupo de investigación contienen un conjunto de demostraciones que pueden enriquecer las lecciones de mecánica vectorial y álgebra superior; nuestra contribución intenta complementar dichos análisis con un tratamiento numérico utilizando Matlab. El análisis es generado para un cono de dimensión particular, a partir de los resultados calculados por ese grupo, con el objetivo de facilitar los cálculos a través del uso del Matlab.

Nelly Amatista León Gómez (2006), refiere al estudio de temas como criptografía o teoría de números, lo cual puede dar a los estudiantes la oportunidad de acercarse a las matemáticas de una manera ligera, para motivar la búsqueda del conocimiento. Los problemas aquí tratados y discutidos pueden ser expresados en forma didáctica y lograr ese propósito.

DESARROLLOS MATEMÁTICOS

Razón áurea y secuencia de Fibonacci

Walser es uno de los autores que mejor demuestra los conceptos. Si se define la razón del segmento más pequeño entre otro más grande se tiene la ecuación de segundo grado

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{x} \quad x^2 - 1 = x \quad (4)$$

Con raíces tales que

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618 \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad (5)$$

La longitud debe ser positiva por tanto se escoge x_1 . Walser usa el recíproco de esta como la razón dorada.

De la ecuación cuadrática y de ambas raíces, se observan muchas propiedades que pueden ser usadas para derivar otros resultados. Por ejemplo si se hace

$$\rho = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618 \quad , \quad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad (6)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \tau\rho &= 1 & \tau + \rho &= \sqrt{5} \\ \tau - \rho &= 1 & \tau^2 &= \tau + 1 \end{aligned} \quad (7)$$

La última puede generalizarse a

$$\tau^{n+2} = \tau^{n+1} + \tau^n \quad (8)$$

Aplicando linealización de potencias se obtienen en los coeficientes de la linealización los números de Fibonacci, tal que

$$\tau^n = a_n \tau + a_{n-1} \quad n \in 2, 3, 4, \dots \quad (9)$$

que satisface la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (10)$$

Si se definen los valores iniciales como $a_0 = 1$ $a_1 = 1$ se tiene la secuencia 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... que puede generalizarse de varias maneras.

Por último del cociente sucesivo de los números de Fibonacci, puede obtenerse el valor del límite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \tau \quad (11)$$

Circuito eléctrico de infinitas resistencias en serie y en paralelo.

En la figura 1 se describe un circuito con una cantidad infinita de resistencias de igual valor R . Se puede probar que el circuito equivalente es de la forma $R_{eq} = \phi R$.

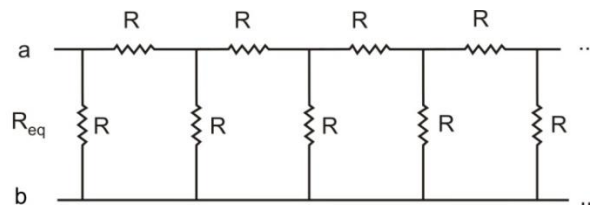


Fig.1. Circuito eléctrico de infinitas resistencias.

Para una primera demostración inductiva se parte de un circuito de sólo 3 mallas, tal circuito se establece en la figura 2a.

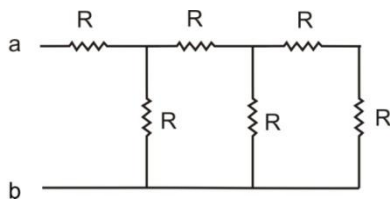


Fig. 2a. Circuito de 3 mallas.

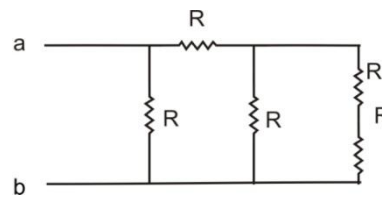


Fig. 2b. La última malla tiene dos resistencias en serie las cuales están en paralelo con su adyacente.

En la figura 2b, se aplica la fórmula de resistencia equivalente para circuitos en paralelo, de tal forma que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \quad R_{eq} = \frac{2}{3}R. \tag{12}$$

Por otra parte, el circuito resultante se representa en la figura 3b:

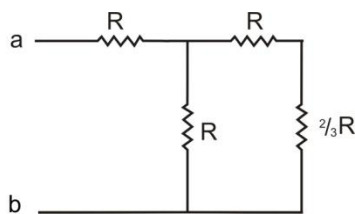


Fig. 3a. Se observa el mismo proceso: dos resistencias en serie ($R + \frac{2}{3}R$), las cuales están en paralelo con la adyacente.

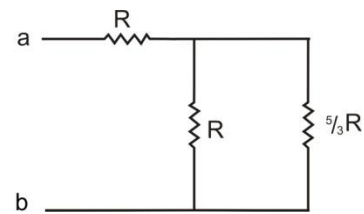


Fig. 3b. Nueva configuración resultante.

La figura 3b permite determinar otra resistencia equivalente de la forma

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{5}{3}R} \quad R_{eq} = \frac{5}{8}R. \tag{13}$$

El proceso para resolver el problema de tres mallas tiene por último las siguientes configuraciones.

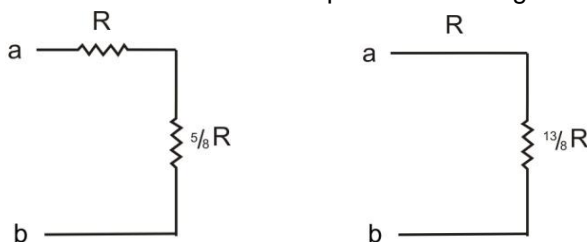


Fig.4. Resistencia equivalente para tres mallas.

Aplicando solución a este último se llega a

$$R_{eq} = R + \frac{5}{8} R = \frac{13}{8} R \quad (14)$$

En un circuito de cuatro mallas la solución es $R_{eq} = \frac{21}{13} R$. Se identifica la presencia de la serie de Fibonacci, Wörner hace una demostración con base a fracciones continuas, usando el hecho de que todo número irracional puede representarse como fracción continua infinita, de tal forma que el número de oro se escribe

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (15)$$

Para el caso del circuito de la figura 3b se puede expresar como

$$\frac{R_{eq}}{R} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}, \quad (16)$$

y por último para el circuito de la figura 4,

$$\frac{R_{eq}}{R} = \frac{13}{8} = 1 + \frac{5}{8} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{5}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} \quad (17)$$

Una demostración más formal es la efectuada en el libro de problemas olímpicos, ahí se propone separar el circuito en dos secciones como se muestra en la figura 5.



Fig. 5. Otra forma abreviada para configurar el circuito de infinitas resistencias.

La parte derecha de la figura 5 sigue siendo una colección infinita de resistencias y tiene R_{eq} pues es igual a la figura 1. Tal situación se puede representar como en la figura 6. Por tanto, puede plantearse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{eq}} = \frac{R+R_{eq}}{RR_{eq}} \quad R_{eq} = \frac{RR_{eq}}{R+R_{eq}} \quad (18)$$

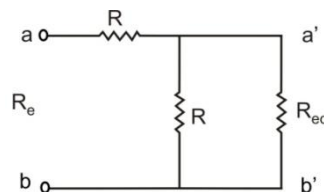


Fig. 6. Circuito que contiene en la resistencia equivalente todas las demás.

Asimismo se define una nueva variable tal que $R_e = R + R_{eq}$. Considerando el lado derecho de esta ecuación como la resistencia equivalente buscada, entonces se tiene

$$R_{eq} = R + \frac{RR_{eq}}{R+R_{eq}} = \frac{R^2 + 2RR_{eq}}{R+R_{eq}} \quad R_{eq}^2 - RR_{eq} - R^2 = 0 \quad (19)$$

Que al resolver ésta última se llega a $R_{eq} = \emptyset R$. Falta la tarea de buscar los voltajes y las corrientes en cada elemento del circuito.

Resistencia que ofrece al movimiento un cono truncado.

El problema aerodinámico de Newton para conos truncados, como el del lado izquierdo de la figura 7, la solución tiene una agradable sorpresa y es que se puede demostrar, según Cruz et al. (2010), que el cono de mínima resistencia es aquel que se construye con proporciones áureas. En ese trabajo se encuentra una función para representar la resistencia aerodinámica como a continuación se describe en forma general.

Se supone que el cono permanece inmóvil y las partículas se mueven hacia abajo con velocidad constante v . Primero se analiza el caso de un cilindro de radio r y altura h , lado derecho figura 7, los momentos lineales antes y después del choque serán $p_1 = mv$ y $p_2 = -mv$.

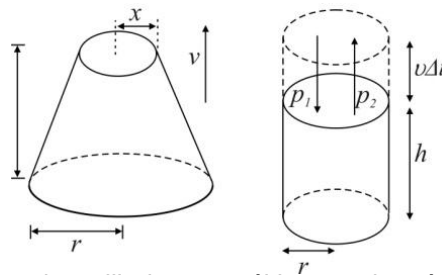


Fig. 7. Cono truncado y cilindro, este último es de más fácil y rápida solución.

Con $v = v$. Solamente las partículas que se encuentran a una distancia menor a $v\Delta t$ de la base superior del cilindro pueden chocar con ésta en el tiempo Δt . Sea ρ la densidad del medio y V es el volumen del cilindro de radio r y altura $v\Delta t$. Los autores definen R_{cil} como la resistencia del cilindro y demuestran claramente que está dada por $R_{cil} = 2\pi\rho v^2 r^2$.

Para el caso de un cono truncado de altura h con base inferior de radio r y base superior de radio x , las colisiones pueden ocurrir en la base superior y en el costado. Lado derecho de la figura 8.

Sea R_s la resistencia sobre la base superior y R_c la resistencia sobre el costado, entonces se tiene la resistencia total R_x será la suma de ambas $R_x = R_s + R_c$.

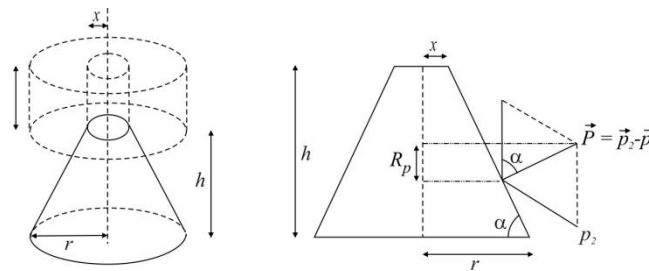


Fig. 8. El resultado del cilindro es útil para resolver el cono truncado.

Cuando $x = r$ se tiene que $R_c = 0$ por tanto $R_x = R_{cil}$; además usando el resultado para un cilindro, se calcula en ese trabajo, que la resistencia de la superficie es $R_s = 2\pi\rho v^2 x^2$.

Para obtener la resistencia del costado R_c , se puede observar cómo las partículas que chocan contra el costado del cono en un tiempo Δt son las que están en un "cilindro" hueco, como el del lado izquierdo de la figura 8, cuyo volumen es el mismo que el del cilindro hueco de altura $v\Delta t$, de radio exterior r y radio interior x . Bajo consideraciones similares al primer caso, agregando un análisis de álgebra y trigonometría básica, una función tal que $R_c = 2\pi\rho v^2 (r^2 - x^2) \cos^2 \alpha$.

Al sumar R_s y R_c se obtiene $R_x = 2\pi\rho v^2 (x^2 + (r^2 - x^2) \cos^2 \alpha)$. Usando la relación del coseno en la figura 8,

$$\cos \alpha = \frac{r - x}{r - x^2 + h^2} \tag{20}$$

Asimismo si se define $K = 2\pi\rho v^2$ se tiene entonces la función de la resistencia aerodinámica,

$$R(x) = K(x^2 + r^2 - x^2) \frac{r - x^2}{r - x^2 + h^2} \tag{21}$$

Para buscar el cono truncado de mínima resistencia se tiene que encontrar el valor mínimo de $R(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq r$. Equivale a encontrar el mínimo de la Ec. (21). Para modificar un poco la función se suma y resta h^2 en el numerador se tiene entonces,

$$f(x) = r^2 - h^2 \frac{r^2 - x^2}{r - x^2 + h^2} \quad 0 \leq x \leq r \tag{22}$$

Y por lo tanto, minimizar $f(x)$ para $0 \leq x \leq r$ equivale a maximizar

$$g(x) = \frac{r^2 - x^2}{r - x^2 + h^2} \quad 0 \leq x \leq r \tag{23}$$

Nuestra contribución ahora puede ser planteada, se trata de generar un cono particular y poder facilitar el cálculo; por lo tanto, se propone una solución con el método gráfico. De la ecuación se establece un caso tal que $h = r = 1$, al sustituir en la Ec. (23), la función a derivar es

$$g(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + 1} \tag{24}$$

Primero se genera su grafica en $0 \leq x \leq 1$, tal y como se muestra en la figura 9, que tiene un máximo entre 0.30 y 0.40. Al derivar la Ec. (24) e igualar a cero, problema que equivale a buscar la raíz de la ecuación derivada. Aplicando los comandos apropiados de Matlab, se obtiene el cero de la función.

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{2x^2 - 6x + 2}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 10x + 4} = 0 \quad x = 0.3820 \tag{25}$$

Si se grafican la ecuación (24) y (25), se observa su validez en la figura 10.

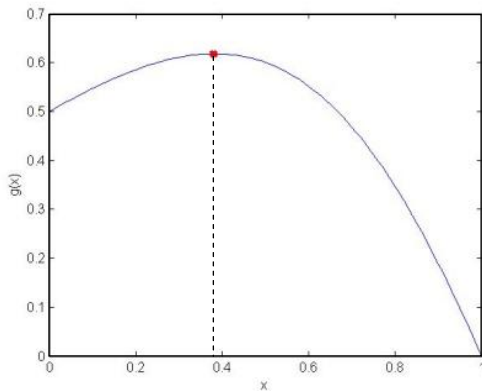


Fig. 9 Gráfica de $g(x)$ con un máximo cerca a 0.40

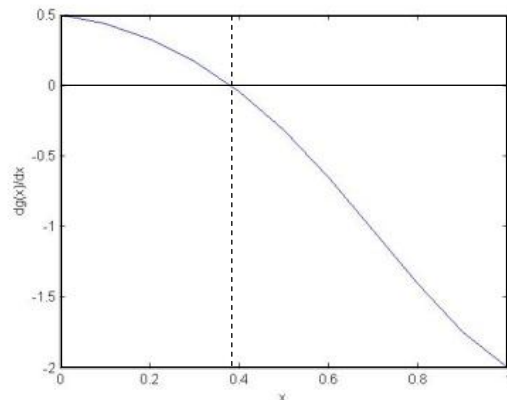


Fig. 10. Se observa la raíz cerca a 0.40

Para construir un cono de altura H y base de radio r , que al truncarlo a la altura h produzca un cono de mínima resistencia, se procede de acuerdo a la figura 11. Es fácil determinar que la altura H debe estar dada por

$$H = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{2} + r^2} \tag{26}$$

Si se hace $h = r$, entonces $H = \tau r$. Con $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Para el caso del cono de dimensión particular $r = 1$, $h = 1$, se utiliza a la figura 11, donde se puede observar como la dimensión del rectángulo áureo es consistente con el caso particular. Por tanto, el cono de mínima resistencia posee dimensiones áureas. En la figura 12 se presenta el rectángulo del caso particular propuesto.

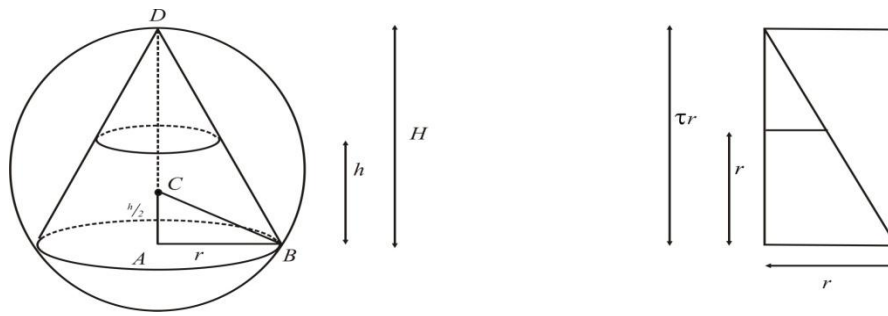


Fig. 11. Método de construcción de un rectángulo áureo.

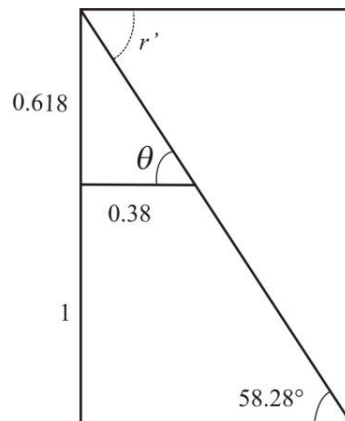


Fig. 12. Rectángulo áureo que prueba la validez del método reportado

Ahora otra forma de corroborar el resultado es usar el ángulo de un rectángulo áureo, donde se puede observar que $\tan(90^\circ - 58.28^\circ) = 1/\phi$; la tarea siguiente es demostrar el resultado sin Matlab, es decir mediante análisis algebraico.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

De los resultados analizados para cada problema se obtiene un análisis complementario de los autores consultados. En el circuito de la escalera semi-infinita de resistencias óhmicas, la solución inductiva puede conectarse con el uso de representación en fracciones continuas que hace Wörner. En la solución del problema olímpico faltan eslabones por probar, principalmente al construir la ecuación de segundo grado. También es posible resolver el problema si se tiene una fuente de voltaje. En otras referencias hay tratamientos de ese tipo. Queda pendiente el cálculo de energía e intensidad en todo el circuito.

En el problema del cono truncado de mínima resistencia se presenta un análisis, con base al método de Jaime Cruz Sampedro. Nuestra aportación prueba la validez de la propuesta aplicando su resultado a un caso particular, esto nos permite facilitar el cálculo de la derivada; además, posibilita graficar y verificar mediante una tarea numérica la veracidad de las formulas consultadas. Es importante en este caso efectuar todas las demostraciones generadas en la obra de consulta, pues constituye una lección ejemplar. La tarea faltante es probar la ecuación (21), (22) y (23) mediante un camino diferente.

CONCLUSIONES

La divergencia de ideas entre Falbo, Markowsky y Stakhov, tiene efectos positivos en el estudio del tema pues los primeros logran despojar el halo mágico atribuible; sin embargo, es deseable que prospere la fundamentación de las matemáticas armónicas, lo que implica un desafío mayor. Nuestro trabajo intenta demostrar el papel creciente de la secuencia de Fibonacci en la didáctica de la física y las matemáticas de una manera agradable, por tanto se consideran los dos problemas con utilidad en ese contexto. El problema del circuito puede extenderse, al hacer otras configuraciones de escaleras semi-infinitas de capacitores o cálculos de voltajes. Para el caso de aerodinámica, nuestro planteamiento se basa en la

gráfica y la derivada resuelta. Nuestra colaboración consiste en demostrar el resultado consultado. El valor que maximiza la función, se incluye al trazar un rectángulo áureo. Nuestro análisis tiene valor demostrativo con uso de software. Es menester aclarar la posibilidad de salir del contexto newtoniano y explorar otros métodos. Por último, no soslayar el comentario de las habilidades matemáticas formativas involucradas en ambos ejercicios, y las oportunidades que se abren para invitar a explorar maravillas como los fractales de Mandelbrot y el legado de Ramanujan.

REFERENCIAS

- Affleck I., *Golden ratio seen in a magnetic.* Nature. 464, 362-363 (2010).
- Alonso M. y Finn E., *Fundamental University Physics*, Vol. 2, Addison-Wesley (1967).
- Benett A., *Phi: The golden number* (en línea) 1 Agosto 2012, <http://www.goldennumber.net/quantum-time/>.Phi point solution, LLC. USA (1997).
- Bleher P.M., *The energy level for two harmonic oscillators with golden mean ratio of frequencies.* Journal of Statistical Physics. 61, 3-4, 869-876(1990).
- Buyukkhc F. y Dimirhan D., *Cumulative diminutions with Fibonacci approach, golden section and physics.* Int. J. Theor Phys (2008) 47, 606-616(2008).
- Coldea R. et al., *Quantum criticality in an Ising Chain: Experimental evidence for Emergent E8 symmetry.* Science 327, 177-181 (2010).
- Cruz J. y Tetlalmatzi M., *POEM and Newton's Aerodynamic Frustum.* The college Mathematics Journal 41, 2, 145-152 (2010).
- Falbo C., *The golden ratio a contrary viewpoint.* College Math. J. 36 123-134 (2005).
- Halici S., *On Complex Fibonacci Quaternions.* Adv. Appl. Clifford Algebras. Junio (2012).
- Huylebrouck D., *Similarities in irrationality proofs for π, ζ^2, ζ^3 .* Amer Math. Monthly 108, 222-231 (2001).
- León Gomez N.A., *Algunos elementos matemáticos presentes en el código da Vinci.* Paradigma 27 1 (2006).
- Livio M., *La proporción áurea.* 10ª Ed. Ariel España (2002).
- Markowsky G., *Misconceptions about the golden ratio.* College Math. J. 23 2-19 (1992).
- Sanjinés Diego C., *Sucesión generalizada de Fibonacci aplicada a circuitos tipo escalera.* Revista Boliviana de Física. 17, 41-46 (2010).
- Sociedad Mexicana de Física. *Problemas aplicados en las olimpiadas de la SMF.* Edit. SMF México (2007).
- Stakhov A. P., *The generalizated principle of the golden section and its applications in mathematics science and egineering.* Chaos Solitons Fractal 26 263-289 (2005).
- Walser Hans., *The Golden Section.* Edit. The mathematical association of America. EEUU (2001).
- Wörner C.H., *La razón áurea y una escalera semi-infinita de resistencias.* <http://cabierta.uchile.cl/revista17/articulos/pdf/edu.pdf> (1999).