

Modelo Hidrodinámico para la Velocidad de un Par de Burbujas Ascendiendo en Línea

Jorge Ramírez-Muñoz, Alberto Soria y Elizabeth Salinas-Rodríguez

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Departamento de I.P.H., Apdo. Postal 55-534,
09340 México, D. F.-México

(e-mail: cbi204180545@xanum.uam.mx, asor@xanum.uam.mx, sabe@xanum.uam.mx)

Resumen

Se presenta un análisis hidrodinámico de la interacción de dos burbujas esféricas del mismo tamaño alineadas en la dirección de un flujo uniforme, laminar, newtoniano e incompresible. La burbuja puntera se considera aislada y la burbuja acarreada (segunda burbuja) está sujeta a la acción de cuatro fuerzas: flotación, arrastre cuasiestacionario, impulso del fluido y masa agregada. Aplicando un balance de fuerzas sobre cada burbuja se obtuvo una nueva expresión para la velocidad de ascenso de la burbuja acarreada. La expresión se comparó con mediciones experimentales, realizadas por otros autores citados en la literatura, para números de Reynolds de 3.06, 21.5 y 35.4 y se obtuvo un error relativo promedio entre 1.2% y 2.1%. Se discuten dos alternativas para aproximar la reducción del arrastre sobre la burbuja acarreada. Se encontró que el arrastre cuasiestacionario no puede incorporar el efecto total de la estela sobre la burbuja acarreada.

Palabras clave: modelo hidrodinámico, velocidad de burbujas, efecto de la estela, arrastre

Hydrodynamic Model for the Velocity of a Bubble Pair Rising In-line

Abstract

A hydrodynamic analysis on the interaction of two equal-size spherical bubbles aligned on the direction of a uniform, laminar, newtonian and incompressible flow, is presented. The leading bubble is considered as an isolated bubble and the trailing bubble (second bubble) is subjected to four forces: buoyancy, quasisteady drag, fluid impulse and added mass. By applying a force balance on each bubble, an expression for the rising velocity of the trailing bubble was obtained. Comparison of this expression with existing experimental data for 3.06, 21.5 and 35.4 Reynolds number was performed, obtaining a relative average error between 1.2% and 2.1%. Two possible approaches on the trailing bubble drag reduction effect are discussed. It was found that a quasisteady drag is, by itself, unable to incorporate the whole wake effect on the trailing bubble.

Keywords: hydrodynamic model, bubble velocity, wake effect, drag

INTRODUCCIÓN

Los sistemas multifásicos, en donde una fase (gaseosa, líquida o sólida) se encuentra dispersa en forma de partículas en una fase fluida continua son comúnmente utilizados en un gran número de dispositivos de la industria de procesos químicos, petroquímicos, biológicos, ambientales, metalúrgicos, farmacéuticos, etc. Una amplia comprensión de los diversos mecanismos de interacción de un gran número de partículas moviéndose en un dispositivo industrial (columna de burbujeo, equipo de sedimentación, columna de fluidización, tanque de flotación de minerales, etc.) está lejos de ser alcanzada en la actualidad; no obstante, un caso particular, pero aún realista y útil, es la interacción en línea de un par (o tren) de partículas. El estudio de las interacciones existentes en estos sistemas (Yuan y Prosperetti, 1994) es un paso necesario en la derivación de modelos promediados en mecánica de fluidos de sistemas multifásicos (Lahey, 1991). En este trabajo, se estudia la interacción hidrodinámica de dos burbujas esféricas de gas ascendiendo en línea en un líquido newtoniano e incompresible a números de Reynolds $1 < Re < 50$, donde el número de Reynolds se define como $Re = u_s d / \nu$. Aquí, u_s , d y ν son la velocidad relativa de la burbuja respecto a la del líquido, el diámetro de la burbuja y la viscosidad cinemática del líquido, respectivamente. A continuación se citan algunos estudios que se consideran relevantes en el contexto de este trabajo.

Harper (1970), extendió la teoría de Moore (1963) (válida para una sola burbuja esférica libre de surfactantes ascendiendo en un flujo uniforme a $Re \ll 1$), al caso de dos burbujas esféricas interactuando en línea con la estela de la burbuja puntera. En su desarrollo incluyó la presencia de una estela delgada detrás de la burbuja puntera; sin embargo, no consideró la difusión de vorticidad en la estela, ni su efecto sobre la segunda burbuja. Es decir, asumió flujo potencial en la estela y predijo la existencia de una distancia de equilibrio en la cual el gradiente repulsivo de presión se iguala al movimiento relativo inducido por la estela de la burbuja puntera. En esta distancia, ambas burbujas se mueven a una misma velocidad constante. Sin embargo, a $Re \leq 200$, la contribución de los efectos viscosos en la estela son los dominantes y la teoría de Harper (1970) deja de ser válida. Esto fue demostrado por Yuan y Prosperetti (1994), quienes ignorando la aproximación de flujo potencial en la estela de la primer burbuja, resolvieron numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes a $20 < Re < 200$ para el mismo problema estudiado por Harper (1970). Yuan y Prosperetti (1994) encontraron que el arrastre sobre la segunda burbuja depende del Re y es siempre inferior al de la burbuja puntera. Además, se reduce al disminuir la separación entre burbujas. Por otra parte, encontraron que la burbuja puntera únicamente se ve afectada significativamente por la presencia de la segunda burbuja, a distancias de separación entre burbujas del orden de un diámetro de burbuja. Ellos también predijeron la existencia de una distancia de equilibrio.

Harper (1997), extendió su análisis previo, para considerar la difusión de vorticidad entre burbujas. Sugirió una aproximación general para estimar el arrastre sobre un tren de burbujas ascendiendo en línea, sus resultados para dos burbujas se ajustan a los de Yuan y Prosperetti (1994).

En general, el movimiento relativo inducido por la estela, se conoce como un efecto de escudo (acarreo), permitiendo que la velocidad de la segunda burbuja (burbuja acarreada) se incremente a medida que la distancia de separación entre burbujas disminuye. Para un par de burbujas ascendiendo en línea, Crabtree y Bridgwater (1971) observaron que la velocidad de ascenso de la burbuja puntera no se ve afectada significativamente por la velocidad de aproximación de la burbuja acarreada. Sin embargo, la velocidad de la burbuja acarreada puede ser evaluada como la suma de la velocidad terminal de una burbuja aislada más la velocidad de la estela evaluada en el frente de esta burbuja.

Katz y Meneveau (1996) (referido en este trabajo como KM), realizaron experimentos para determinar el efecto de la estela en el movimiento de burbujas esféricas de aire del mismo diámetro ascendiendo en línea en agua destilada estancada a $0.2 < Re < 35$. Observaron que el efecto de atracción de la estela culminó con una colisión y posteriormente ocurrió la coalescencia entre el par de burbujas. Esto también fue observado experimentalmente por Chester y Hofman (1982) y Tsao y Koch (1994). Estas observaciones contradicen la existencia de una distancia de equilibrio. Yuan y

Prosperetti (1994) sugieren que una posible causa de la discrepancia entre la teoría y los experimentos podría atribuirse a la deformación de las burbujas inducida por el flujo de líquido alrededor de ellas. Por otra parte, Harper (1997) señala como otra posible causa a la actividad superficial; debido a que una ligera contaminación del líquido afecta su libre circulación sobre la superficie de la burbuja. La causa podría también residir en el hecho de que en los estudios teóricos se ha considerado el efecto repulsivo del gradiente de presión por medio de la aproximación de Lamb (1932) obtenida para flujo potencial ($Re \rightarrow \infty$), por lo que se podría estar sobreestimando este efecto. Sin embargo, en la actualidad no se ha comprendido el origen de esta discrepancia e intentar abordar este problema está más allá del alcance del presente trabajo.

Ruzicka (2000), estudió numéricamente la dinámica de un tren de burbujas esféricas del mismo diámetro interactuando en línea a $50 < Re < 200$. Propuso un balance de fuerzas suponiendo que tres fuerzas actuaban sobre cada burbuja en el tren: flotación, arrastre viscoso e inerciales invíscidas. Además, consideró la existencia de dos tipos de interacciones: locales (entre burbujas contiguas) y no-locales (entre burbujas no contiguas). Para el caso de interacciones locales, sus predicciones se ajustan muy bien a los resultados de Yuan y Prosperetti (1994).

Para el caso de dos burbujas esféricas del mismo diámetro interactuando en línea, si se supone que la velocidad del fluido en la estela de la burbuja puntera varía sólo ligeramente en distancias del orden de la dimensión del cuerpo; pueden distinguirse tres mecanismos de interacción (contribuciones a la fuerza hidrodinámica) actuando sobre la segunda burbuja. Estos mecanismos son: (1) la reducción del arrastre viscoso debido al efecto de escudo de la burbuja puntera, (2) la fuerza de aceleración del fluido independiente de la presencia del cuerpo, y (3) la fuerza de masa agregada. Las dos últimas contribuciones son fuerzas inerciales independientes de los efectos viscosos de la fase continua.

Específicamente, el efecto de la reducción del arrastre ha sido tomado en cuenta mediante dos aproximaciones. La primera aproximación (válida para $Re \ll 1$) se basa en modificar el coeficiente de arrastre estacionario de Moore (1963). Esta aproximación permite sustituir un factor constante por una función dependiente de la distancia de separación entre burbujas para la burbuja puntera, y por otra función para la burbuja acarreada. Al mismo tiempo, considera velocidades relativas de ambas burbujas con respecto a la velocidad uniforme del líquido lejos de ellas (Yuan y Prosperetti, 1994; Harper, 1997; Ruzicka, 2000). La segunda aproximación consiste en usar correlaciones del coeficiente de arrastre estacionario para burbujas aisladas, especificando una velocidad relativa típica, que considere el flujo no uniforme en la estela (Yuan y Prosperetti, 1994). KM sugieren aproximar esta velocidad (para distancias $s/d \ll Re$), mediante la suma del exceso del flujo dado por la solución potencial evaluada en el frente de la burbuja acarreada, más el exceso del flujo que corresponde al perfil asintótico promediado sobre el área frontal proyectada por ambas burbujas. Harper (1997) corroboró que esta aproximación es aún válida para $s/d > o(1/2)$ si $Re \ll 1$.

La fuerza de aceleración del fluido en el régimen de flujo laminar es independiente del Re (Maxey y Riley, 1983). Además, siguiendo la trayectoria de una partícula material de fluido en la estela de la burbuja puntera, ésta se desacelera conforme se aproxima a la burbuja, por lo que esta fuerza tiene un efecto de frenado sobre la segunda burbuja. Del mismo modo, a distancias pequeñas de separación entre burbujas el flujo en el frente de la segunda burbuja produce un efecto similar sobre la primera burbuja. Por lo tanto, es una fuerza inercial repulsiva que actúa en dos direcciones ocasionando que ambas burbujas se repelan. Su efecto ha sido considerado mediante una de las siguientes aproximaciones: (1) siendo introducida como un efecto repulsivo del gradiente de presión utilizando la solución potencial (Lamb, 1932; KM), (2) simplemente ignorándolas, como parte de un gradiente de presión o una contribución específica (Zhang y Fan, 2003), o como se propone en este trabajo para $1 \leq Re \leq 50$, (3) considerándolo como la contribución convectiva de la fuerza de aceleración del fluido (suponiendo que la segunda burbuja interactúa con el perfil asintótico promediado sobre el área frontal proyectada por ambas burbujas).

La fuerza de masa agregada sobre una burbuja acelerándose convectivamente en la dirección de un flujo laminar, transitorio y no-uniforme es una fuerza inercial resistiva e independiente del Re que

surge a causa de la presencia del cuerpo (Magnaudet y Eames, 2000). Esta fuerza tiene dos contribuciones: La primera surge debido a que la masa de fluido acelerado por la burbuja, ejerce sobre ésta una fuerza proporcional a la aceleración del fluido. La segunda contribución es la fuerza inercial adicional que ejerce la masa del fluido acelerado por la burbuja, debido a su resistencia al movimiento acelerado de la burbuja.

La masa de fluido acelerado por la burbuja es conocida como masa agregada y puede ser considerada como un incremento en la masa del cuerpo, dando por resultado la masa virtual. Para una partícula esférica inmersa en un volumen infinito de fluido, la masa agregada es igual a la mitad de la masa de fluido desplazado por el cuerpo. Así, la primera contribución tiene una magnitud que equivale a la mitad de la fuerza de aceleración del fluido. Por lo tanto, esta primera contribución más la fuerza de aceleración del fluido son comúnmente consideradas como un efecto de atracción-repulsión siguiendo el análisis de Lamb (1932) para la interacción en línea de un par de esferas en el régimen de flujo potencial (Yuan y Prosperetti, 1994; Ruzicka, 2000).

El objetivo de este trabajo es obtener un modelo simplificado para predecir la velocidad de aproximación de la segunda burbuja a la primera, que considere los tres mecanismos de interacción hidrodinámica discutidos previamente además de la fuerza de flotación. Para ello se aplica la ecuación de movimiento a cada burbuja, la burbuja puntera se considera como una burbuja aislada moviéndose a su velocidad terminal, mientras que tanto el efecto de la estela de esta burbuja, como el efecto de aproximación de la segunda burbuja a la primera, se consideran cuasiestacionarios (cfr. KM).

Además, se propone una similitud entre la suma de las fuerzas de flotación, aceleración del fluido y masa agregada (evaluadas con el modelo del perfil asintótico de la estela), y la velocidad de aproximación experimental de la segunda burbuja. Con estas hipótesis se obtiene una nueva expresión para la velocidad de aproximación de las burbujas. Esta expresión se compara con datos experimentales de KM, mostrando una mejor predicción que la del modelo de Crabtree y Bridgwater (1971), el cual únicamente considera el efecto de reducción del arrastre sobre la segunda burbuja.

METODOLOGÍA

Dos burbujas de gas ascendiendo en línea

Consideremos dos burbujas de gas esféricas y del mismo diámetro ascendiendo en línea, en la dirección del flujo uniforme y estacionario de un líquido newtoniano e incompresible, como se muestra en la Fig. 1. Esta figura corresponde a los experimentos de KM, quienes determinaron la velocidad de aproximación de las burbujas, mediante técnicas de visualización.

En este contexto, la superficie de atrás de la burbuja puntera (denominada Burbuja 1) se encuentra localizada a una distancia $R_1(t)$, medida desde un marco de referencia de laboratorio (x, y, z) . Se designa como s a la componente axial de un marco de referencia inercial cilíndrico cuyo origen coincide con la superficie de atrás de la Burbuja 1. Un punto en el espacio puede ser expresado en ambos marcos de referencia de acuerdo a la siguiente transformación coordenada

$$z = R_1(t) - s. \quad (1)$$

Siguiendo la trayectoria de una partícula material de fluido $z(t)$ y transformándola de acuerdo a la Ec. (1), su derivada temporal está dada por

$$u_z = U_{b1} - u_s, \quad (2)$$

donde U_{b1} es la velocidad de la Burbuja 1, u_z y u_s son la magnitud de la velocidad del flujo uniforme lejos de ambas burbujas en el marco de referencia de laboratorio y de la Burbuja 1, respectivamente. La misma notación se adopta para la velocidad del flujo no-uniforme en la estela de la burbuja puntera w_z y w_s .

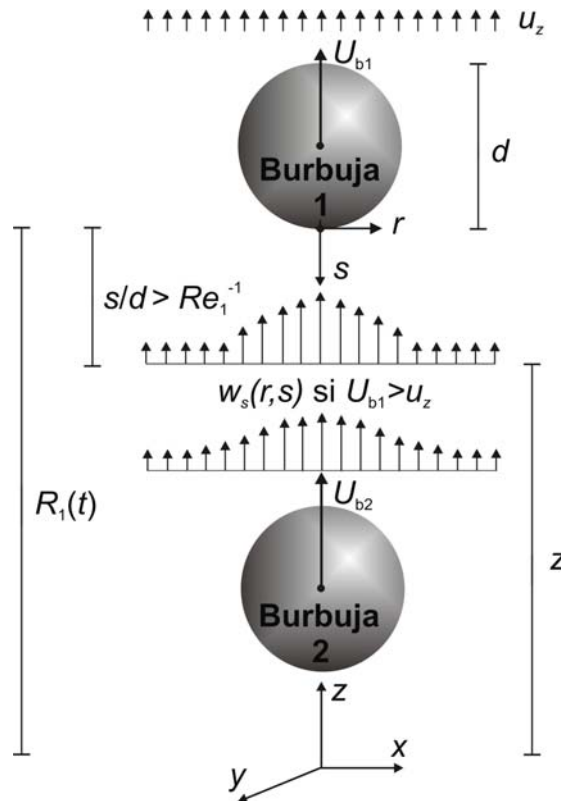


Fig. 1. Interacción de dos burbujas esféricas ascendiendo en línea.

Con la finalidad de simplificar el análisis del problema, se proponen las siguientes suposiciones: (1) La velocidad de aproximación de la burbuja acarreada (denominada Burbuja 2) depende únicamente de la distancia instantánea de separación entre burbujas y no de su historia en el tiempo. Así, el proceso es cuasiestacionario en su naturaleza, y tanto la contribución de la aceleración del cuerpo en la fuerza de masa agregada como el término histórico de fuerza pueden despreciarse (cfr. KM). (2) El único mecanismo de interacción que se considera entre burbujas es el flujo no-uniforme inducido por la burbuja puntera, el cual se superpone al flujo uniforme. (3) La Burbuja 2 se encuentra localizada a una distancia tal que su proximidad no afecta a la Burbuja 1 (el flujo en el frente de la segunda burbuja no afecta a la primera), es decir, la burbuja puntera se comporta como una burbuja aislada moviéndose a su velocidad terminal. (4) El número de Reynolds de burbuja está en el régimen de flujo $1 < Re < 50$, por lo tanto, a cierta distancia del cuerpo, el flujo en la estela es laminar, estacionario y con simetría axial (Batchelor, 1967). (5) El número de Weber (We) es mucho menor que 1 (ambas burbujas mantienen siempre su forma esférica). (6) La superficie de ambas burbujas se encuentra libre de surfactantes (no existe actividad superficial).

Fuerzas actuando sobre ambas burbujas

El balance estacionario de fuerzas actuando sobre la burbuja puntera moviéndose a su velocidad terminal en un volumen infinito de fluido, se expresa simplemente como:

$$F_g + F_{d1} = 0, \tag{3}$$

donde F_g es la fuerza boyante neta actuando hacia arriba sobre el centro de la burbuja, y considera la diferencia entre las fuerzas de flotación y gravitacional (aunque la fuerza gravitacional sobre una burbuja es despreciable y la fuerza boyante neta equivale a la fuerza de flotación). Además, F_{d1} es la fuerza de arrastre estacionaria que actúa sobre la superficie de la burbuja, la cual se suele expresar como

$$F_{d1} = -C_{d1} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho (U_{b1} - u_z)^2, \tag{4}$$

siendo ρ la densidad del fluido.

Consideremos ahora el flujo en la estela de la Burbuja 1. Para distancias $s/d > Re^{-1}$, el flujo puede expresarse como (Batchelor, 1967):

$$\begin{aligned} \frac{U_{b1} - w_z}{u_s} &= \frac{w_s}{u_s} \\ &= 1 - \frac{C_{d1}}{2} \frac{Re_1}{16} \frac{d}{s} \exp\left(-\frac{Re_1}{4} \frac{r^2}{sd}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

donde r es la coordenada radial en el marco de referencia anclado en la burbuja y C_{d1} es el coeficiente de arrastre estacionario (referido al área frontal proyectada por la burbuja).

El balance cuasiestacionario de fuerzas sobre la burbuja acarreada, puede escribirse simbólicamente como

$$F_g + F_{d2} + F_{WR} + F_{AM} = 0. \tag{6}$$

Aquí, F_{d2} , F_{WR} y F_{AM} son las fuerzas de arrastre, aceleración del fluido y masa agregada, respectivamente. En la ecuación anterior se ha considerado que la inercia de la burbuja es despreciable comparada con la inercia del líquido, y tanto la contribución del término de aceleración del cuerpo en la fuerza de masa agregada como el término histórico de fuerza son despreciables respecto a las demás fuerzas consideradas.

Debe considerarse que obtener una expresión analítica para el arrastre sobre una burbuja inmersa en un flujo altamente no-uniforme (en la dirección transversal al flujo) a $1 \leq Re \leq 50$ no es una tarea sencilla. Sin embargo, como se discutió previamente, una forma de estimar el arrastre sobre la burbuja acarreada consiste en usar correlaciones del coeficiente de arrastre estacionario, especificando una velocidad relativa apropiada en la estela. Así, en este análisis se propone que la burbuja acarreada interactúa debido a su velocidad relativa con respecto a una velocidad típica del flujo en sus proximidades. Definimos esta velocidad típica como el perfil de velocidad asintótico promediado sobre el área proyectada por ambas burbujas (Zhang y Fan, 2003):

$$\bar{w}_z = \frac{4}{\pi d^2} \int_0^{d/2} w_z(r,s) 2\pi r dr. \tag{7}$$

El arrastre sobre la burbuja acarreada es

$$F_{d2} = -C_{d2} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho (U_{b2} - \bar{w}_z)^2, \tag{8}$$

siendo C_{d2} el coeficiente de arrastre referido a la velocidad relativa $U_{b2} - \bar{w}_z$.

Al sustituir la Ec. (5) en la Ec. (7) e integrar el resultado, se obtiene la siguiente expresión adimensional para el exceso promedio de la velocidad en la estela

$$W = \frac{\bar{w}_z - u_z}{u_s} = \frac{C_{d1}}{2} \left[1 - \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{d}{s}\right) \right]. \tag{9}$$

Consideremos ahora una burbuja hipotética moviéndose a la misma velocidad que la Burbuja 2, pero interactuando con el flujo uniforme de fluido. La fuerza de arrastre sobre esta burbuja sería

$$F_{dh2} = -C_{dh2} \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{2} \rho (U_{b2} - u_z)^2, \quad (10)$$

donde C_{dh2} es el coeficiente de arrastre estacionario referido a la velocidad relativa $U_{b2} - u_z$. Sustituyendo la Ec. (3) en la Ec. (6) y dividiendo el resultado por la Ec. (10) se obtiene

$$\frac{F_{d2}}{F_{dh2}} = \frac{F_{d1}}{F_{dh2}} - \frac{F_{WR}}{F_{dh2}} - \frac{F_{AM}}{F_{dh2}} = \frac{1}{\gamma} \frac{F_{d1}}{F_{dh2}}, \quad (11)$$

donde

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{F_{WR}}{F_{d1}} - \frac{F_{AM}}{F_{d1}}. \quad (12)$$

Al considerar la Ec. (9), así como las definiciones dadas en las Ecs. (4), (8) y (10), se llega a las siguientes expresiones adimensionales para la fuerza sobre la burbuja puntera y la burbuja acarreada:

$$\frac{F_{d2}}{F_{dh2}} = \frac{U_{b2} - \bar{w}_z}{U_{b2} - u_z} = 1 - \frac{W}{U_b} \quad (13)$$

y

$$\frac{F_{d1}}{F_{dh2}} = \frac{U_{b1} - u_z}{U_{b2} - u_z} = \frac{1}{U_b}, \quad (14)$$

donde $U_b = (U_{b2} - u_z)/(U_{b1} - u_z)$ es la velocidad adimensional de la burbuja acarreada. En las Ecs. (13) y (14) únicamente se ha considerado la principal dependencia del coeficiente de arrastre C_d con respecto al número de Reynolds, es decir, $C_d \propto Re^{-1}$.

La contribución convectiva de las fuerzas de aceleración del fluido y de masa agregada, puede expresarse adimensionalmente, usando la Ec. (9), como (Maxey y Riley, 1983; Auton et al., 1988):

$$\begin{aligned} \frac{F_{WR}}{F_{d1}} &= \frac{m_f}{F_{d1}} \left(\bar{w}_z \frac{d\bar{w}_z}{ds} \right) \\ &= \frac{Re_1}{24} \left(\frac{d}{s} \right)^2 (1 - W) \exp\left(-\frac{Re_1}{16} \frac{d}{s} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

y

$$\frac{F_{AM}}{F_{d1}} = \frac{1}{2} \frac{m_f}{F_{d1}} \left(\bar{w}_z \frac{d\bar{w}_z}{ds} \right) = \frac{1}{2} \frac{F_{WR}}{F_{d1}}. \quad (16)$$

Aquí, $m_f = \rho \pi d^3/6$ es la masa de fluido desplazado por la burbuja. Al sustituir las Ecs. (15) y (16) en la Ec. (12) se obtiene

$$\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{3 F_{WR}}{2 F_{d1}} \tag{17}$$

$$= 1 - \frac{Re_1}{16} \left(\frac{d}{s}\right)^2 (1 - W) \exp\left(-\frac{Re_1 d}{16 s}\right).$$

Así, en caso de conocer o lograr establecer alguna tendencia o hipótesis plausible acerca de la función multiplicadora γ , el balance cuasiestacionario de fuerzas (Ec. 11) podría simplificarse considerablemente. En este trabajo, el interés específico es obtener un modelo lo más simplificado posible para predecir la velocidad de aproximación de ambas burbujas. Con este propósito, en la Fig. 2 se comparan las predicciones de $1/\gamma$ (Ec. 17) para $Re_1 = 21.5$ con las mediciones experimentales de $1/U_b$. La semejanza entre el comportamiento de $1/\gamma$ y $1/U_b$ es evidente en esta figura, por lo que es razonable proponer que

$$\frac{1}{\gamma} \approx \frac{1}{U_b}. \tag{18}$$

Sustituyendo las Ecs. (13), (14) y (18) en la Ec. (11) se obtiene

$$U_b (U_b - W) = 1. \tag{19}$$

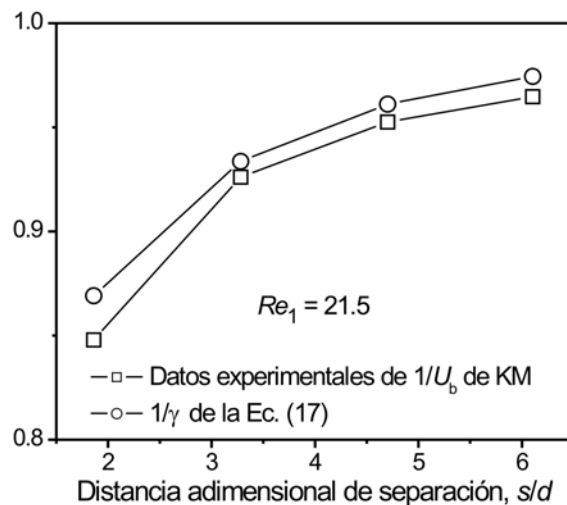


Fig. 2. $1/\gamma$ y $1/U_b$ para diferentes distancias de separación.

Esta ecuación simplificada equivale al balance de fuerzas sobre la Burbuja 2 dado en la Ec. (6). Al resolver para U_b , considerando únicamente la raíz positiva se obtiene la siguiente expresión:

$$U_b = \frac{W + \sqrt{W^2 + 4}}{2}, \tag{20}$$

la cual representa la principal contribución de este trabajo. Debe notarse que en esta expresión la velocidad de ascenso de la burbuja acarreada se iguala a la de la burbuja puntera ($U_b = 1$) a una distancia de separación entre burbujas infinita ($s/d \rightarrow \infty$).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Citaremos las principales características del modelo obtenido en este trabajo.

(i) La burbuja acarreada interactúa con el perfil asintótico promediado en su área proyectada. (ii) El efecto de la estela no se considera únicamente como una reducción en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria, sino también a través de la incorporación de las fuerzas inerciales. (iii) Se incorporó la función multiplicadora γ . (iv) Se encontró que el comportamiento de γ es similar al de U_b de acuerdo con mediciones experimentales. La contribución de ambas fuerzas inerciales actuando sobre la burbuja acarreada del balance de fuerzas dado en la Ec. (11) se retiene en el presente análisis a través de la función multiplicadora γ . Despreciar estos efectos equivale a suponer $\gamma = 1$. En tal caso, de las Ecs. (3) y (11) se obtiene el siguiente balance estacionario de fuerzas: $F_g + F_{d2} = 0$. Sustituyendo las Ecs. (13) y (14) en la Ec. (11) se obtiene $U_b = 1 + W$, primeramente propuesta por Crabtree y Bridgwater (1971) a partir de sus observaciones experimentales. El hecho de que este proceso sea considerado como cuasiestacionario reside en que la velocidad de aproximación entre ambas burbujas es función únicamente de su separación instantánea para un Re específico. Así, los modelos considerados como cuasiestacionarios deberían considerar la contribución convectiva de las fuerzas de aceleración lagrangiana del fluido y masa agregada, y no únicamente el arrastre cuasiestacionario.

Para comparar las predicciones de nuestro modelo para U_b dado en la Ec. (20) y el modelo de Crabtree y Bridgwater (1971) se usan datos experimentales de burbujas de aire ascendiendo en agua destilada reportados por KM. En la Fig. 3 se grafica U_b en función de la distancia s/d para Re_1 de 3.06, 21.5 y 35.4, respectivamente. Los parámetros necesarios del modelo son también tomados de sus mediciones experimentales e incluidos en la Fig. 3.

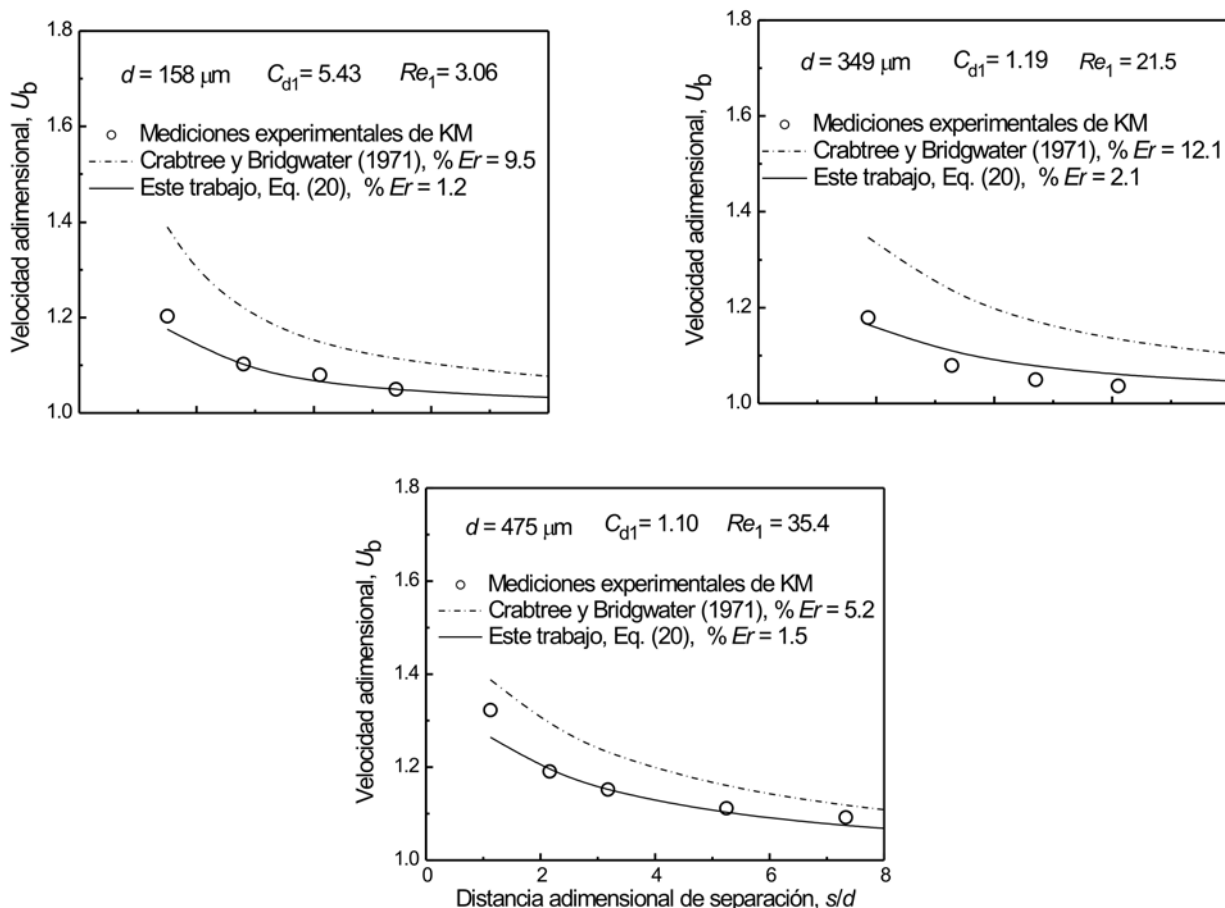


Fig. 3. Velocidad de aproximación de ambas burbujas a diferentes Re .

Para estimar el error estadístico promedio entre las predicciones del modelo de Crabtree y Bridgwater (1971) y el obtenido en la Ec. (19), se usan las mediciones experimentales y la siguiente definición del error relativo promedio (Bevington y Robinson, 1992):

$$\%Er = \sum_i^N \frac{1}{N} \frac{[(Exp)_i - (Pred)_i]}{(Exp)_i} \times 100. \quad (21)$$

Los valores obtenidos a partir de la Ec. (21) son también reportados en la Fig. 3. Se observa que para grandes distancias de separación entre burbujas ambos modelos dan una buena aproximación de las mediciones experimentales. Sin embargo, a medida que la separación disminuye, el modelo obtenido en este trabajo da siempre una mejor predicción, con un intervalo de error entre 1.2% para $Re_1=3.06$ y 2.1% para $Re_1=21.5$; mientras que con el modelo de Crabtree y Bridgwater (1971) se obtiene un error entre 5.2% ($Re_1=35.4$) y 12.1% ($Re_1=21.5$). Esta diferencia se adjudica a la adición de los efectos inerciales en la fuerza hidrodinámica.

CONCLUSIONES

Al estudiar la interacción de dos burbujas alineadas en la dirección de un flujo uniforme, se obtuvo una nueva expresión adimensional para la velocidad de aproximación de la segunda burbuja interactuando con la estela de la primera. El efecto total de la estela se consideró no sólo como una reducción en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria, sino también a través de la incorporación de las fuerzas inerciales, las cuales fueron transformadas definiendo una función multiplicadora γ mayor que 1. El valor límite de $\gamma=1$ se obtiene cuando se aplica un balance en estado estacionario sobre la segunda burbuja, y esta condición se alcanza cuando se desprecian ambas fuerzas inerciales. No obstante, esta condición límite no evita la permanencia del efecto de la estela en la fuerza de arrastre cuasiestacionaria. La función multiplicadora se evalúa en este trabajo mediante el perfil de velocidad asintótico y se encuentra que tiene un comportamiento similar a los valores experimentales de U_b . El resultado de incorporar esta suposición a la ecuación de balance de fuerzas consistió en una nueva expresión para la velocidad de aproximación de ambas burbujas. Sin embargo, dado que la expresión fue derivada considerando una similitud y no sólo principios fundamentales, se debe tener cuidado al extrapolar su aplicación. La expresión ha sido probada para $3 < Re < 35.4$. En este régimen de flujo, no pueden utilizarse la corrección de Oseen (Golovin y Ivanov, 1973) (válida para $Re \ll 1$) o la teoría aproximada de Moore (1963) (válida para $Re \ll 1$). Por lo tanto, debido a la inexistencia de expresiones analíticas en el régimen de flujo estudiado, la expresión obtenida en este trabajo puede ser usada como una aproximación inicial.

En resumen, el efecto total de la estela sobre la burbuja acarreada como se analiza en este trabajo, considera tanto la reducción del arrastre cuasiestacionario como los efectos inerciales. Los efectos inerciales son tomados en cuenta por la función multiplicadora γ , cuya semejanza con la velocidad de aproximación de ambas burbujas, permite obtener mejores predicciones de las mediciones experimentales.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se llevó a cabo gracias al apoyo brindado por CONACYT. No. Becario 171336.

NOMENCLATURA

C_d	Coeficiente de arrastre, adimensional
C_{d1}	Coeficiente de arrastre de la burbuja puntera, adimensional
C_{d2}	Coeficiente de arrastre de la burbuja acarreada, adimensional
C_{dh2}	Coeficiente de arrastre de la burbuja hipotética, adimensional

d	Diámetro de la burbuja, m
Er	Error relativo promedio, adimensional
F_{AM}	Fuerza de masa agregada, N
F_{d1}	Fuerza de arrastre sobre la burbuja puntera, N
F_{d2}	Fuerza de arrastre sobre la burbuja acarreada, N
F_{dh2}	Fuerza de arrastre sobre la burbuja hipotética, N
F_g	Fuerza boyante neta, N
F_{WR}	Fuerza de aceleración lagrangiana del fluido, N
m_f	Masa de fluido desplazado por la burbuja, kg
N	Número de datos experimentales, adimensional
r	Coordenada radial, m
$R_1(t)$	Distancia entre orígenes de ambos marcos de referencia, m
Re	Número de Reynolds de burbuja, adimensional
t	Tiempo, s
u	Velocidad del flujo uniforme, ms^{-1}
U_b	Velocidad de la burbuja acarreada, adimensional
U_{b1}	Velocidad de la burbuja puntera, ms^{-1}
U_{b2}	Velocidad de la burbuja acarreada, ms^{-1}
U_{bh2}	Velocidad de la burbuja hipotética, ms^{-1}
w	Perfil de velocidad en la estela, ms^{-1}
\bar{w}	Perfil de velocidad asintótico promediado en el área proyectada por ambas burbujas, ms^{-1}
W	Exceso promedio de la velocidad en la estela, adimensional
We	Número de Weber, adimensional

Letras griegas

γ	Como se define en la Ec. (17), adimensional
ν	Viscosidad cinemática del fluido, m^2s^{-1}
ρ	Densidad del fluido, kgm^{-3}

Subíndices

s	Componente axial del marco de referencia anclado en el cuerpo
z	Componente vertical del sistema de referencia de laboratorio

REFERENCIAS

- Auton, T. R., J.C.R. Hunt y M. Prud'homme; *The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow*. J. Fluid Mech., 197, 241-257 (1988).
- Batchelor, G.K.; *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra (1967).
- Bevington, P.R. y D.K. Robinson; *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, 2ª edición, McGraw-Hill, Nueva York, EUA (1992).
- Chester, A.K. y G. Hoffman; *Bubble coalescence in pure liquids*, Appl. Sci. Res., 38, 353-361 (1982).
- Crabtree, J.R. y J. Bridgwater; *Bubble coalescence in viscous liquids*. Chem. Eng. Sci., 26, 839-851 (2000).

- Golovin, A.M. y M.F. Ivanov; *Motion of a bubble in a viscous liquid*, J. Appl. Mech. Tech. Phys. (URSS), 12, 91-94 (1973).
- Harper, J.F.; *On bubbles rising in line at large Reynolds number*, J. Fluid Mech., 41, 751-758 (1970).
- Harper, J.F.; *Bubbles rising in line: why is the first approximation so bad?*, J. Fluid Mech., 351, 289-300 (1997).
- Katz, J. y C. Meneveau; *Wake-induced relative motion of bubbles rising in line*, Int. J. Multiphase flow, 22, 239-258 (1996).
- Lahey, R.T.; *Void wave propagation phenomena in two-phase flow*, A. I. Ch. E Journal, 37, 123-135 (1991).
- Lamb, H.; *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra (1932).
- Magnaudet, J. y I. Eames; *The motion of high-Reynolds-number bubbles in inhomogeneous flows*, Annu. Rev. Fluid Mech., 32, 659-708 (2000).
- Maxey, M.R. y J.J. Riley; *Equation of motion of a small rigid sphere in a nonuniform flow*, Phys. Fluids, 26, 883-888 (1983).
- Moore, D.W.; *The boundary layer on a spherical gas bubble*, J. Fluid Mech., 16, 161-176 (1963).
- Ruzicka, M.C.; *On bubbles rising in line*. Int. J. Multiphase flow, 26, 1141-1181 (2000).
- Tsao, H.-K. y D.L. Koch; *Collisions of slightly deformable, high Reynolds number bubbles with short-range repulsive forces*, Phys. Fluids, 6, 2591-2605 (1994).
- Yuan, H. y L.A. Prosperetti; *On the in-line of two spherical bubbles in a viscous fluid*, J. Fluid Mech., 278, 325-349 (1994).
- Zhang, J. y L.-S. Fan; *On the rise velocity of an interactive bubble in liquids*, Chem. Eng. J., 92, 169-176 (2003).