Análisis del Comportamiento de un Ciclo Tipo Carnot

Delfino Ladino-Luna

Universidad Autónoma Metropolitana-Atzacapatzalco, Área de Física de Procesos Irreversibles,
Dpto. de Ciencias Básicas, Av. San Pablo 180, Col. Reynosa, 02200, Atzacapatzalco, D. F.-México
(e-mail: dll@correo.azc.uam.mx)

Recibido Oct. 26, 2009; Aceptado Ene. 08, 2010; Versión Final recibida Feb. 12, 2010

Resumen

Se hace un análisis de las regiones de existencia de la función potencia de salida y función ecológica, que dan lugar a la forma de las respectivas eficiencias para un ciclo tipo Carnot, llamado ciclo endorreversible, a potencia de salida máxima y función ecológica máxima. Se muestra la importancia dichas regiones de existencia de estas funciones para diversos resultados de la literatura relacionada con la termodinámica de tiempos finitos. Se concluye que para modelar gráficamente el desempeño de una máquina térmica, es necesario hacer un análisis de las regiones de existencia de los parámetros importantes que describen el comportamiento de la maquina.

Palabras clave: eficiencia, endorreversibilidad, optimización, potencia de salida, ciclo de Carnot

Analysis of the Behavior of a Carnot Type Cycle

ABSTRACT

An analysis of the regions of existence of power output and ecological function, that give the form of respective efficiencies for a Carnot type cycle, called endorreversible cycle, at maximum power output and at maximum ecological function is done. The importance of these regions of existence of these functions is shown, for different results from the literature on finite time thermodynamics. It is concluded that for graphically modeling the performance of a heat engine, it is necessary to perform an analysis of the regions of existence of the most important parameters that describe this behavior of the engine

Keywords: efficiency, endoreversibility, optimization, power output, ecological function, Carnot cycle

INTRODUCCIÓN

En el contexto de la Termodinámica Clásica de Equilibrio, el modelo más simple de una máquina que transforma calor en trabajo es el conocido *ciclo de Carnot*. El comportamiento de la máquina térmica, representada por este ciclo, se expresa por la relación entre la cantidad eficiencia η , y la razón de las temperaturas de los almacenes de calor $\varepsilon = T_2/T_1$, la eficiencia de Carnot $\eta_C = \eta_C(\varepsilon)$, dada por,

$$\eta_C \equiv 1 - T_2/T_1 .$$

(1)

Las temperaturas de los almacenes frío y caliente, respectivamente, son T_2 y T_1 (que se supone son las mismas que las temperaturas de trabajo de la máquina térmica, ver figura 1), y η_C constituye un límite físico para cualquier máquina térmica. El ciclo de Carnot paga el precio de ser el más eficiente posible con tener una potencia nula, pues los procesos que lo componen son infinitamente lentos.

Fig. 1. Ciclo de Carnot en el plano entropía, S , vs. Temperatura, T . Las cantidades Q_1 y Q_2 son los calores absorbido y cedido, respectivamente por la máquina.

Un ciclo más realista que el de Carnot es el ciclo modificado de la Figura 2, con potencia no nula, donde se toman en cuenta los procesos de transferencia de calor entre el sistema y sus alrededores, hallando el tiempo de duración de dichos procesos, propuesto por Curzon y Ahlborn (1975). Al suponer una conductancia térmica α , constante, y que la transferencia de calor se realiza como indica la ley de enfriamiento de Newton, para este ciclo se puede escribir,

$$\frac{dQ}{dt} = (-1)^{i-1} \alpha (T_i - T_{iw}); \quad i = 1,2 .$$

(2)

La rapidez de transferencia de calor Q es dQ/dt , T_i es la temperatura de la fuente (caliente ó fría) y T_{iw} es la temperatura de trabajo de la máquina. Para el ciclo de Carnot se tiene $T_2 = T_{2w}$ y $T_1 = T_{1w}$.

Fig. 2. Ciclo de Curzon y Ahlborn en el plano entropía S , vs. Temperatura T . Q_1 y Q_2 son los calores absorbido y cedido, respectivamente por la máquina.

Para el ciclo a potencia máxima, Curzon y Ahlborn obtuvieron una eficiencia como la hallada para plantas núcleo-eléctricas por Novikov (1957) y Chambadal (1957), conocida como eficiencia de Curzon-Alborn-Novikov-Chambadal, y que también es función de la razón de temperaturas T_2/T_1 , por lo que la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov-Chambadal es $\eta_{CAN}(\varepsilon)$, y se encuentra como,

$$\eta_{CAN} \equiv 1 - \sqrt{T_2/T_1}. \quad (3)$$

A partir del trabajo de Curzon y Ahlborn, se desarrolló una nueva manera de analizar los sistemas termodinámicos, llamada *Termodinámica de Tiempos Finitos*. Siguiendo esta línea, Gutkowicz-Krusin et al (1978) propusieron tomar en cuenta la razón de compresión, y por otro lado Angulo Brown (1991b) propuso tomar en cuenta la producción de entropía a través de una función, llamada función ecológica, que representa la relación entre potencia producida P y producción de entropía σ ,

$$E = P - \sigma. \quad (4)$$

En este contexto, en la mayoría de los trabajos, aún los más recientes, se busca una función objetivo y la eficiencia obtenida a partir de ella, como función de algún parámetro controlable. Así, entre otros, Curzon y Ahlborn (1975), Gutkowicz-Krusin et al (1978), Agrawal et al (1994) y De Vos (1985) maximizaron la potencia de salida; Torres (1988), Angulo-Brown (1991a) y Bejan (1996) minimizaron la producción de entropía; Angulo-Brown (1991b), Cheng y Chen (1997), Ladino-Luna y de la selva (2000) y Velasco et al (2000) maximizaron la función ecológica.

Se han analizado otros aspectos del funcionamiento de una máquina térmica, por ejemplo, recientemente, Agnew y Ameli (2004), Ladino-Luna y Páez-Hernández (2005), Chen et al (2005), Ust (2009) y Huang y Sun (2008) analizaron un ciclo de refrigeración; Qin et al (2003), Ust et al (2005) y Ladino-Luna (2007) analizaron ciclos con irreversibilidades internas. Otros problemas diversos se abordan en Ladino-Luna (2005), Wang et al (2008) y Ladino-Luna (2008). Sin embargo, en ninguno de estos trabajos se hace un análisis de las regiones de existencia de las funciones objetivo, arriba indicadas.

En el presente trabajo, a partir de las expresiones para potencia de salida y función ecológica, halladas respectivamente en Gutkowicz-Krusin et al (1978), y Ladino-Luna y de la Selva (2000), con un gas ideal como sustancia de trabajo, encerrado por un émbolo móvil en un cilindro, y la ley de transferencia de calor de Newton, con conductancia térmica α constante, se analiza gráficamente la manera como aparecen las curvas que representan el funcionamiento del ciclo de Curzon y Ahlborn, para máxima potencia y máxima función ecológica, en un plano de ciertas coordenadas. El trabajo tiene dos objetivos: mostrar uno de los aspectos de la llamada termodinámica de tiempos finitos y mostrar cómo aparecen las curvas que representan la potencia de salida, la función ecológica y la eficiencia, dado un modelo de máquina térmica. Las graficas se obtienen utilizando el paquete llamado *Scientific Work Place (SWP)*. Es posible construir estas gráficas con otros paquetes computacionales, pero SWP tiene la ventaja de poder escribir las ecuaciones por graficar de manera natural, y al mismo tiempo realizar ampliaciones que muestren detalles ocultos de las figuras.

POTENCIA Y FUNCIÓN ECOLÓGICA

En los trabajos arriba citados se realiza la construcción de la función objetivo en términos de dos variables. Así, en el caso particular de Gutkowicz-Krusin et al (1978), Agrawal et al (1994) y Ladino-Luna y de la Selva (2000), la función objetivo se escribe, para el sistema *gas + émbolo*, como

$$P = \alpha(T_{1w} - T_{2w}) \left(\ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right) \times \left[\left(\frac{T_{1w}}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_{2w} - T_2} \right) \ln \frac{V_3}{V_1} \right]^{-1}, \quad \text{potencia de salida} \quad (5)$$

$$E = \alpha \left[(T_{1w} - T_{2w}) \left(\ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_{2w}}{T_{1w}} \right) + \left(\frac{T_{1w}}{T_1} + \frac{T_{2w}}{T_2} \right) \ln \frac{V_2}{V_1} \right] \times \left[\ln \frac{V_3}{V_1} \left(\frac{T_{1w}}{T_1 - T_{1w}} + \frac{T_{2w}}{T_{2w} - T_2} \right) \right]^{-1}, \quad \text{función ecológica.} \quad (6)$$

Con el cambio de variables $u = T_{1w}/T_1$ y $z = T_{2w}/T_{1w}$, y con la relación para procesos adiabáticos reversibles $TV^{\gamma-1} = const.$, se tiene,

$$P = \alpha T_1 \left[(1-z)(1 + \lambda \ln z) \right] \left(\frac{1}{1-u} + \frac{z}{uz-\varepsilon} \right)^{-1}, \quad \text{potencia de salida,} \tag{7}$$

$$E = \alpha T_1 (1 + \varepsilon - 2z)(1 + \lambda \ln z) \left(\frac{1}{1-u} + \frac{z}{uz-\varepsilon} \right)^{-1}, \quad \text{función ecológica.} \tag{8}$$

Se ha introducido el parámetro $\lambda \equiv ((\gamma - 1) \ln(V_3/V_1))^{-1}$ para el caso de adiabatas no instantáneas. El problema más simple es cuando $\lambda = 0$, y corresponde al llamado *ciclo endorreversible*. Así, las expresiones de la potencia y la función ecológica, para valores constantes de α, T_1, ε y λ , son función de las variables u y z , esto es, $P = P(u, z)$ y $E = E(u, z)$ y a partir de las expresiones (7) y (8) se encuentra que existe una región de existencia para ellas en el plano (u, z) .

Función potencia

En la figura 3 se ha graficado $P/(\alpha T_1)$ a partir de (7), para las variables u y z , tomando como parámetros constantes $\varepsilon = 0.5$ y $\lambda = 0$. En el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$, P tiene valores mayores que cero en el intervalo $\varepsilon < z < 1$, y al ser cortada la superficie por un plano $u = constante$, se genera una curva con un extremo máximo, para la variable z . Esto equivale a proyectar la superficie sobre un plano (z, P) . También se observa una sub-región del rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ donde P no es cero, con valores de z mayores a ε , que se hace importante cerca del punto $(1,1)$. Este comportamiento se observa con la relación entre u y z , de modo que $u = u(z)$ y $P = P(u(z), z)$. Al maximizar P se obtiene la expresión analítica de la curva $P_{m\acute{a}x} = P_{m\acute{a}x}(u(z), z)$, donde se tiene que $u = (\varepsilon + z)/(2z)$,

$$P_{m\acute{a}x} = \alpha T_1 \frac{(z - \varepsilon)(1 - z)(1 + \lambda \ln z)}{4z}. \tag{9}$$

Obsérvese que la superficie es asintótica para el valor $z = \varepsilon$, de manera que la región de existencia física para la potencia es sólo la superficie que aparece a medida que se disminuye la escala de valores de $P/(\alpha T_1)$.

Fig. 3. Gráfica de $\frac{P}{\alpha T_1}$ en la región $[0, 1] \times [0, 1]$ para las variables u y z , $\varepsilon = 0.5, \lambda = 0$.

Como $P \geq 0$, z debe estar en el intervalo físicamente posible $[\varepsilon, 1]$, esto es $\varepsilon \leq z \leq 1$; así, $\varepsilon \leq u \leq 1$, es decir, la región físicamente importante del plano (u, z) es el rectángulo $[\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 1]$, como se observa en la figura 4. Bajo estas condiciones se cumple $P_{\max} = P_{\max}(u(z), z)$. Para adiabatas instantáneas en el ciclo se tiene $z_0 = z(\lambda = 0) = \sqrt{\varepsilon}$, por tanto,

$$\eta_{\max} = 1 - z(\lambda = 0, \varepsilon) = \eta_{CAN}, \tag{10}$$

Fig. 4. Gráfica de $\frac{P}{\alpha T_1}$ en la región de existencia física de P , $[\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 1]$ para las variables u y z , $\varepsilon = 0.5$, $\lambda = 0$

Función ecológica

Con las mismas suposiciones que para la potencia, se construye la producción de entropía para tener la forma de la función ecológica, definida como $E = P - T_2\sigma$, para hallar la región en que se tendrá un máximo de dicha función. Se conocen los calores absorbido y cedido por el sistema, entonces la producción de entropía en el ciclo es $\sigma \equiv \frac{\Delta S}{t_{TOT}}$, de manera que la función ecológica se puede escribir como en (8). Las gráficas de la figura 5 muestran el comportamiento de $E(u, z)$, en forma semejante a $P(u, z)$. Es importante observar que también existe una sub-región del rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ físicamente posible para los valores de u y z . Para hallar dicha sub-región se buscará primero $u = u(z)$, de manera de obtener $E = E(u(z), z)$.

Así, puesto que $E \geq 0$, para $\lambda = 0$, se debe cumplir que $\varepsilon \leq z \leq (1 + \varepsilon)/2$ y $2\varepsilon/(1 + \varepsilon) \leq u \leq 1$ se encuentra que la sub-región de existencia física de la función ecológica es el rectángulo $[\varepsilon, (1 + \varepsilon)/2] \times [2\varepsilon/(1 + \varepsilon), 1]$, para las variables z y u , obteniéndose las gráficas de la figura 6, en donde la segunda gráfica muestra como va emergiendo la función ecológica en su región de existencia física.

La maximización de $E = E(u, z)$, permite obtener la expresión para la función ecológica máxima en función sólo de z , de manera semejante a la potencia máxima, expresión (9), también para el valor $u = (\varepsilon + z)/(2z)$, como,

$$E_{\max} = \alpha T_1 \frac{(z - \varepsilon)(1 + \varepsilon - 2z)(1 + \lambda \ln z)}{4z}. \tag{11}$$

Se observa en las figura 4 y 6 que $P_{\max}$ y $E_{\max}$ son dos curva que coinciden en $z = \varepsilon$, en donde $\sigma = 0$, de manera que la figura 7 es una gráfica que muestra la relación entre estas tres cantidades, para valores dados de ε . El plano obtenido es para $u = const.$ y $\lambda = 0$. Se observa que E es máxima cuando al mismo tiempo se tiene una baja producción de entropía y una alta potencia producida.

Fig. 5. Gráfica de $\frac{E}{\alpha T_1}$ en el plano de coordenadas (u, z) en la región $[0, 1] \times [0, 1]$, $\varepsilon = 0.5$ y $\lambda = 0$.

Fig. 6. Gráfica de $\frac{E}{\alpha T_1}$ en la región $[\varepsilon, (1+\varepsilon)/2] \times [2\varepsilon/(1+\varepsilon), 1]$, para los parámetros $\varepsilon = 0.5$ y $\lambda = 0$.

Fig. 7. Comparación del comportamiento de P , E y σ , para los valores $\varepsilon = 0.5$ y $\lambda = 0$.

CONCLUSIONES

Como se observa, una vez que se construye la forma de la función a maximizar, la función objetivo, y halladas las relaciones entre las variables en las que se le quiere describir, es conveniente realizar un análisis desde el punto de vista del cálculo, que permita establecer con claridad el dominio de existencia física de la función objetivo y de la eficiencia correspondiente, para modelar gráficamente el funcionamiento de una máquina térmica. A medida que uno reduce el intervalo de valores de dicha función, se puede observar con claridad la región de existencia física de dicha función, así como la forma que adquiere para valores constantes dados de una de las variables introducidas. Así, es posible obtener las gráficas que usualmente se encuentran en la literatura, como la de la figura 7.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo del CONACYT (México), a través del convenio SNI-10171.

REFERENCIAS

- Agnew, B. Y S.M. Ameli; *A Finite Time Analysis of a Cascade Refrigeration System Using Alternative Refrigerants*. Appl. thermal Eng.: 24, 2557-2565 (2004).
- Agrawal, D.C., J.M. Gordon y M. Huleihil; *Endoreversible Engines with Finite-Time Adiabats*. Indian J. Eng. Mat. Sc.: 1, 195-198 (1994).
- Angulo-Brown, F., *An Entropy Production Approach to the Curzon and Ahlborn Cycle*. Rev. Méx. Fís., 37, 87-96 (1991a).
- Angulo-Brown, F.; *An Ecological Optimization Criterion for Finite-Time Heat Engines*. J. Appl. Phys.: 69, 7465-7469 (1991b).
- Bejan, B.; *Entropy Generation Minimization: The New Thermodynamics of Finite-Size Devices and Finite-Time Processes*. J. Appl. Phys., 79, 1191-1217 (1996).
- Curzon, F. L. y B. Ahlborn; *Efficiency of a Carnot Engine at Maximum Power Output*. Am. J. Phys.: 43, 22-24 (1975).
- Chen, L., Z. Xiaoqin, F. Sun y Ch. Wu; *Ecological Optimization for Generalized Irreversible Carnot Refrigerators*. J. Phys. D: Appl. Phys.: 38, 113-118 (2005).
- Cheng, C. Y. y C. K. Chen; *The Ecological Optimization of an Irreversible Carnot Heat Engine*. J. Phys. D: Appl. Phys.: 30, 1602-1609 (1997).
- De Vos, A.; *Efficiency of Some Engines at Maximum-Power Condition*. Am. J. Phys.: 53, 570-573 (1985).
- Gutkowics-Krusin, D., I. Procaccia, y J. Ross; *On the Efficiency of Rate Processes. Power and Efficiency of Heat Engines*. J. Chem. Phys.: 69, 3898-3906 (1978).
- Huang, Y. y D. Sun; *Local Stability Analysis of a Non-Endoreversible Refrigerator*. Appl. Thermal Eng.: 28, 1443-1449 (2008).
- Ladino-Luna, D.; *Van der Waals gas as Working Substance in a Curzon and Ahlborn-Novikov Engine*. Entropy: 7, 108-121 (2005).
- Ladino-Luna, D.; *On optimization of a Non-Endoreversible Curzon-Ahlborn Cycle*. Entropy, 9, 186-197 (2007).
- Ladino-Luna, D.; *Approximate Ecological Efficiency with a Non-Linear Heat Transfer*. J. En. Inst.: 81, 114-117 (2008).
- Ladino-Luna, D. y S.M.T. de la Selva.; *The Ecological Efficiency of a Termal Finite Time Engine*. Rev. Mex. Fís.: 46, 52-56 (2000).
- Ladino-Luna, D. y R.T. Páez-Hernández; *Non-Endoreversible Carnot Refrigerator at Maximum Cooling Power*. Rev. Mex. Fís.: 51, 54-58 (2005).
- Novikov, I.I.; *The Efficiency of Atomic Power Stations. A Review*. J. Nuclear Energy: II, 7, 125-128 (1958).

Qin, X., L. Chen, F. Sun y Ch. Wu; *The Universal Power and Efficiency Characteristics for Irreversible Reciprocating Heat Engine Cycles*. Eur. J. Phys.: 24, 359-366 (2003).

Torres, J.L.; *Minimal Rate of Entropy Production as a Criterion of Merit for Thermal Engines*. Rev. Mex. Fis., 34, 18-24 (1988).

Ust, Y.; *Performance Analysis and Optimization of Irreversible Air Refrigeration Cycles Based on Ecological Coefficient of Performance Criterion*. Appl. Thermal Eng. 29, 47-55 (2009).

Ust, Y., B. Sahin y O.S. Sogut; *Performance Analysis and Optimization of an Irreversible Dual-Cycle Based on an Ecological Coefficient of Performance Criterion*. Appl. En.: 82, 23-39 (2005).

Velasco, S., J.M. Roco, A. Medina, y J.A. White; *Optimization of Heat Engines Including the Saving of Natural Resources and the Reduction of Thermal Pollution*. J. Phys. D.: 33, 355-359 (2000).

Wang, H., S. Liu y J. He; *Performance Analysis and Parametric Optimum Criteria of a Quantum Otto Heat Engine with Heat Transfer Effects*. Appl. Thermal Eng., 29, 706-711 (2009), in press.