

Sistema Bayesiano para Analizar el Comportamiento Aleatorio de una Lotería

Omar D. Castrillón y William Sarache

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales - Facultad de Ingeniería y Arquitectura - Departamento de Ingeniería Industrial, Campus la Nubia – Manizales - Código Postal 170001, Colombia. (e-mail: odcastrillong@unal.edu.co; wasarachec@unal.edu.co)

Recibido Abr. 20, 2017; Aceptado Jun. 23, 2017; Versión final Jul. 28, 2017, Publicado Feb. 2018

Resumen

El objetivo del presente trabajo es analizar un juego de lotería mediante el uso de un sistema Bayesiano con el fin de identificar tendencias en sus resultados. Se encontró que aquellos números cuya función Bayesiana se desempeñó en el rango 2.2 a 2.4, tendrían la mayor posibilidad de ser los ganadores. A pesar de que los resultados no sugieren con plena certeza cuál sería el número exacto que sería ganador de la lotería, la metodología propuesta es de utilidad para ser aplicada y predecir tendencias en otros sistemas aleatorios tales como la accidentalidad vial, el comportamiento de enfermedades y criminalidad, entre otras. Dada la importancia que tiene este tipo de sistemas, identificar y tratar de predecir su comportamiento resulta ser de especial importancia para la toma de decisiones, tanto en el sector público como en el privado.

Palabras clave. proceso aleatorio; clasificador bayesiano; tendencias en un proceso; sistema aleatorio

Bayesian System to Analyze the Random Behavior of a Lottery

Abstract

The objective of the present work is to analyze a lottery game using a Bayesian system in order to identify trends in its results. It was found that those numbers, whose Bayesian function performed in the range 2.2 to 2.4, would have the greatest possibility to be the winners. Although the obtained results do not suggest total certainty to identify the exact winner number, the proposed methodology is useful for applying and predicting trends in other random systems such as car accidents, disease behavior and crime, among others. Given the importance of these types of systems, identifying and trying to predict their behavior is of special importance in public and private decision making.

Keywords. random process; bayesian classifier; trends in a process; random system

INTRODUCCIÓN

Existen algunas metodologías y/o técnicas que intentan predecir el comportamiento de un sistema de lotería; sin embargo, ninguno de ellos es plenamente efectivo para pronosticar acertadamente sus resultados. Por supuesto, si alguien lo lograra, seguramente no lo publicaría. No obstante, algunos comportamientos estadísticos que presentan estos sistemas pueden ser analizados, aumentando la probabilidad de acertar en el pronóstico de un evento de esta naturaleza. La revisión de literatura permite identificar trabajos que se han realizado sobre el análisis de loterías desde diversas perspectivas tales como la psicología, el mercadeo, el impacto social y la predicción, entre otros.

Desde la perspectiva psicológica se destacan diversos trabajos que principalmente abordan el comportamiento de los consumidores de lotería y las estrategias que asumen frente a los resultados (Neufeld y Goodwin, 1998; Van de Ven y Zeelenberg, 2011; Wenmackers, 2013; Lin y Lu, 2015). En el campo del mercadeo, se analizan aspectos relacionados con los compradores y sus fuentes de financiación (Kearney, 2005), satisfacción del cliente (Chow et al., 2006; Dennery y Direr, 2014), diseño de producto (Zhang et al., 2006; Peel, 2013), predicción de ventas (Beldek y Leblebicioğlu, 2011; Mohammadi y Nakhaei, 2012), planeación de ingresos (Damianov, 2015) y estrategias de comercialización (Chen et al. (2016), entre otras. Desde la perspectiva social, se encuentran trabajos que evalúan el impacto social y ambiental en las comunidades (Nishizaki et al., 2005), los efectos en el mercado laboral (Marx y Peeters, 2012), la asociatividad para comprar lotería (Humphreys y Pérez, 2013) y estrategias de fraude (Christou et al., 2011).

Desde el punto de vista de los análisis predictivos (asunto de interés del presente artículo), existen también diversos trabajos relevantes. Por ejemplo, el estudio de Bârboianu (2009), analizó todas probabilidades de ganar una lotería, identificando algunas estrategias de selección. En Chen et al. (2010), se compararon diversas técnicas de predicción de resultados (generación aleatoria de números, selección de números de baja frecuencia, estrategia de alta frecuencia), encontrando que ninguna de ellas era mejor que otra. También se destaca el trabajo de Jabr (2011), quien encontró que si se determinaban las falencias de una lotería (lagunas), ganarla podría ser fácil, dado que dichas falencias permiten encontrar patrones para predecir los resultados.

En el trabajo de Bikhchandani y Segal (2014), se compararon dos loterías estadísticamente independientes por medio de la teoría "Regret", encontrando que estas satisfacían una misma distribución. En Fu et al. (2014) se exploran los principales aspectos del concurso de lotería en reversa anidada. En Harrison et al., (2015) se analizó la reducción de componentes de la lotería, con miras a estudiar el efecto del riesgo y la incertidumbre en su diseño y en los protocolos de pago. Otros estudios relacionados con temas afines a la loterías pueden ser encontrados en Hsu et al., (2016), Rey et al. (2016), Yang (2016) y Olarte et al. (2017). Si bien, los clasificadores Bayesianos tienen una amplia aplicabilidad (Muñoz et al., 2016), estos no han sido muy usados en problemas asociados a juegos de azar. Sin embargo, en el trabajo de Percy (2009) se diseñó un método Bayesiano para obtener la probabilidad de ganar juegos y partidos en el bádminton. Igualmente se resalta el trabajo de Stephens y Crowder (2004), quienes realizaron un análisis de datos para predicción y reclamaciones, usando un método Bayesiano para apoyar la planificación financiera.

Como se observa en la presente revisión de literatura, aunque el problema de la lotería ha sido estudiado desde diferentes ópticas, los análisis enfocados desde el campo predictivo han sido muy pocos. Si bien, actualmente existen diversos sistemas de clasificación (árboles de decisión, máquinas de soporte vectorial, algoritmos genéticos y redes neuronales, entre otros), en esta investigación se propone el uso de un sistema de Bayesiano que permite establecer las relaciones existentes entre las causas de un evento y sus resultados. De acuerdo con Mesa et al. (2011), un sistema Bayesiano genera un modelo probabilístico que relaciona variables dependientes e independientes. En particular, los sistemas Bayesianos son adecuados para clasificar eventos discretos cuando hay datos escasos (Hernández et al. 2010; Castrillón et al. 2017). De otro lado, un sistema es considerado aleatorio si sus resultados no son predecibles; por ello, en el presente trabajo se tomaron 1000 resultados de un juego de lotería que corresponde a sorteos realizados de forma completamente aleatoria e impredecible. En dicho juego el usuario elige 6 números entre 1 y 45 sin repeticiones. Se puede afirmar que el sistema es completamente aleatorio, dado que cuando se realizan los sorteos, se sacan 6 balotas de las 45 existentes en una urna transparente, por medio de un sistema de aire el cual las lanza hacia afuera.

Dado que, típicamente, se piensa que en estos sistemas aleatorios no existen tendencias, el objetivo de este artículo es presentar una metodología basada en un sistema de clasificación Bayesiana, que permite analizar las tendencias existentes en un juego de lotería completamente aleatorio e impredecible. El clasificador permite demostrar que si bien los resultados en un sistema aleatorio no pueden ser predecibles, si existen ciertas tendencias en los mismos. Dicha metodología es perfectamente extrapolable a otros sistemas aleatorios de importancia para la toma de decisiones, tal y como se demostró en el trabajo de Castrillón et al.,

(2017). En dicho trabajo, se empleó un sistema Bayesiano basado en eventos discretos, con escasos datos (variables independientes) cuya finalidad era identificar pacientes con diabetes con base en un grupo de características. El sistema propuesto fue comparado con otros sistemas normalmente empleados para diagnosticar la enfermedad, lográndose demostrar su efectividad.

El modelo propuesto, construye una clase con los resultados de lotería que han salido ganadores, los cuales sirven de base para entrenar el sistema. Todos los demás números que pueden ser posibles ganadores, son validados en el modelo propuesto, con la clase de números que han salido ganadores. Se establece así cuál es la probabilidad que tienen los números que no han sido ganadores de pertenecer a la clase de aquellos que si lo han sido. El análisis permite establecer el conjunto de números que tienen una mayor probabilidad de ser ganadores. Como resultado, se observa que los números que se encuentran en cierto rango de la función bayesiana (2.2 y 2.4) tienen mayores probabilidades de resultar ganadores. Si bien, el análisis Bayesiano identifica el número ganador más probable, no se puede afirmar que dicho resultado goce de plena certeza.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada se compone de los siguientes pasos: i) Construcción de la base de datos de entrenamiento; ii) Entrenamiento y construcción del sistema Bayesiano; iii) Construcción de la base de datos de validación; y iv) Validación del sistema.

Paso 1. Construcción de la base de datos de entrenamiento. La base de datos se conforma con números ganadores de la lotería en cada sorteo. Estos números se organizan por medio de una matriz, tal y como como se ilustra en la Tabla 1.

Tabla 1: Resultados Ganadores de la Lotería. K números de dos dígitos sin repeticiones tomados de M números.

Sorteos	Resultados					
	No 1	No 2	No 3	No 4	No K
1						
2						
...						
n						

Paso 2: Entrenamiento y construcción del sistema Bayesiano. En el sistema propuesto, se define X_i , como una hiper matriz de tres dimensiones que contiene el conjunto de características o datos que serán analizados. Las dimensiones son definidas de la siguiente forma: las filas representan el número de sorteos analizados, las columnas contienen el conjunto de números (máximo de dos dígitos) que conforman cada uno de los resultados de un sorteo. En este caso solo se supondrá una clase (c), la cual corresponde a los números que han sido ganadores. Se calcula el vector de medias u_i y la matriz de covarianza Σ_i de X_i , donde i representa la dimensionalidad de cada una de las matrices expresadas en las ecuaciones 1- 4 y K es una constante definida a partir de la matriz X_i . Para la única clase definida en este sistema, se define una función de probabilidad según el sistema de ecuaciones propuesto por Duda et al. (2001: 41):

$$P_i(x) = X^t W_i X + w_i^t X + w_{i0} \quad (1)$$

Donde,

$$W_i = -\frac{1}{2} \Sigma_i^{-1} \quad (2)$$

$$w_i = \Sigma_i^{-1} u_i \quad (3)$$

$$w_{i0} = -\frac{1}{2} u_i^t \Sigma_i^{-1} u_i - \frac{1}{2} \ln(|\Sigma_i|) + \ln(k) \quad (4)$$

En este punto, cada uno de los resultados de la base de datos de entrenamiento es evaluado en la función bayesiana, con el fin de identificar sus tendencias. Esta evaluación se realiza por medio de una gráfica de frecuencias que se construye con base en el método de Velleman (1976), mediante el apoyo de herramientas computacionales. Con base en esta gráfica se identifica el valor de la función Bayesiana con la máxima frecuencia (valor deseado).

Paso 3. Construcción de la base de datos de validación. Con el fin de establecer los resultados más probables, todos los posibles resultados de la lotería objeto de análisis, son generados mediante un algoritmo procedimental. Este algoritmo genera todos los subconjuntos de K números sin repeticiones tomados del conjunto que contiene los números entre 1 y M. Es decir, todos los subconjuntos formados por la combinatoria (M,K).

Paso 4. Validación del Sistema. Cada uno de los resultados obtenidos en el paso 3, son evaluados en las ecuaciones definidas en el paso 2. Los resultados de la función bayesiana, que presenten una mayor aproximación al valor deseado (según el paso 2), se supondrá que son los valores más probables de ser los números ganadores. En la Figura 1 se ilustra la estructura del clasificador propuesto.

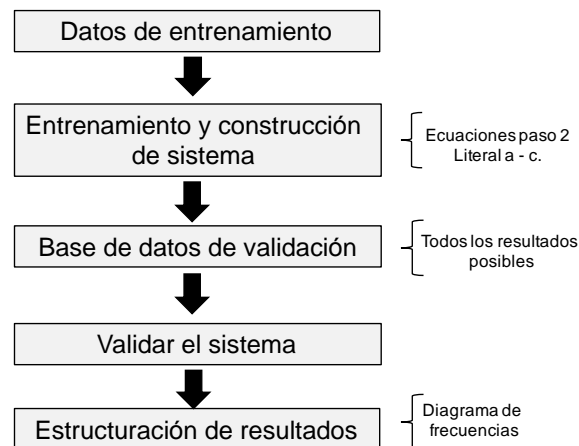


Fig. 1: Estructura del clasificador.

RESULTADOS

Al aplicar la metodología antes descrita, los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Paso 1: Construcción de la base de datos de entrenamiento. Con base en 1000 resultados de un sistema de lotería, se identificaron las siguientes características:

Tabla 2: Características de los datos de entrenamiento

Características	No 1	No 2	No 3	No 4	No 5	No 6
Promedio	6,723	13,08	19,567	22,22	32,704	39,549
Desviación	5,2983	6,6668	7,4347	7,5015	6,9392	5,1251
Varianza	28,0723	44,446	55,2748	56,2719	48,1525	26,2663
Mínimo	1	2	3	5	12	18
Máximo	28	36	40	43	44	45

La información de la Tabla 2 fue tomada de los datos históricos de una empresa comercializadora de lotería, cuyo nombre fue omitido por razones de confidencialidad.

Paso 2: Entrenamiento y construcción del sistema Bayesiano. Tomando como referencia la clase analizada (resultados de la lotería) se obtuvo como resultado la función bayesiana ilustrada en la ecuación (5):

$$P_{\text{resultados}}(x) = X_{(1 \times k)}^t W_{i_{\text{resultados}}(k \times k)} X_{(k \times 1)} + w_{i_{\text{resultados}}(1 \times k)}^t X_{(k \times 1)} + w_{i_{o_{\text{resultados}}}} \quad (5)$$

Donde, la matriz $W_{i_{\text{resultados}}}$, $w_{i_{\text{resultados}}}$, y la constante $w_{i_{o_{\text{resultados}}}}$ son definidas tomando como referencia las ecuaciones 2, 3, 4 y el conjunto de datos de entrenamiento utilizados. Adicionalmente, la dimensionalidad de cada una de las matrices empleadas en la ecuación 5, es representada como subíndice en el paréntesis anexo al lado de cada matriz X , W y w ; esto es: $(1 \times k)$, $(k \times k)$ y $(k \times 1)$. La dimensionalidad representada por la variable k es definida en el paso 3. Para cada uno de los números que han resultado ganadores, se calculó su respectivo valor en la función Bayesiana. Seguidamente, con cada uno de estos valores se realizó un análisis de frecuencias, tal y como se expone en la Figura. 2. En esta Figura se observa

que los números que han sido ganadores y cuyos valores en la función bayesiana fluctúan entre 2,2 y 2,4, generaron los máximos picos en el análisis de frecuencia de la función. En consecuencia, se puede afirmar que al analizar todo el conjunto de posibles números, aquellos que arrojen un resultado entre 2,2 y 2,4 tienen la máxima probabilidad de ser ganadores. Específicamente, el valor máximo de la Figura 2, se encuentra en 2.3946.

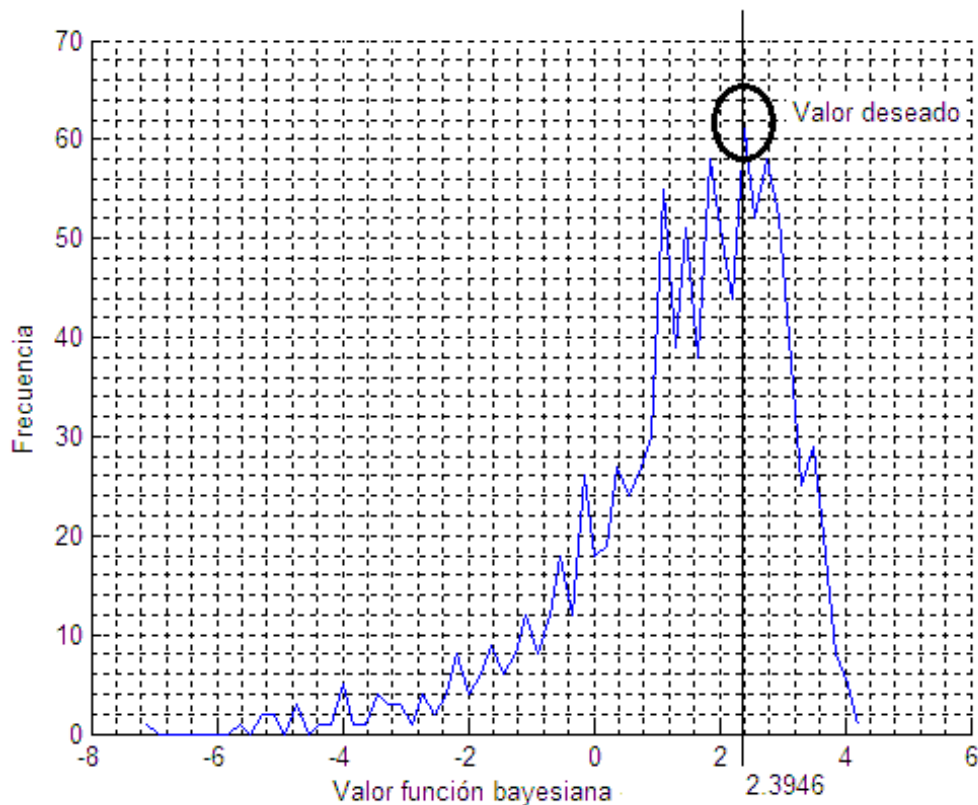


Fig. 2: Análisis bayesiano de los resultados obtenidos

Paso 3. Construcción de la base de datos de validación. Al aplicar el algoritmo procedimental, se obtuvieron 8.145.060 números. Cada número fue evaluado buscando aquel cuyo resultado en la función Bayesiana presentara la máxima aproximación (en valor absoluto) al pico estimado en la Figura 2 (2.3946). Los resultados que ya habían sido ganadores fueron descartados, dado que la probabilidad de que repitan es muy baja.

Paso 4.- Validación del Sistema. Con base en los resultados del paso 3, se encontró la secuencia de números que al ser evaluados en la función Bayesiana presentaron el valor más cercano al buscado (2.3946). En consecuencia estos resultados tendrían una mayor probabilidad de resultar ganadores. La Tabla 3 ilustra (en orden ascendente de mayor a menor aproximación) los 4 números con mayor aproximación (inferior a 1×10^{-6}) al valor deseado en la función Bayesiana.

Tabla 3: Números con una aproximación inferior a 1×10^{-6} al valor deseado de la función Bayesiana (2.3946)

No 1	No 2	No 3	No 4	No 5	No 6	Valor en la función Bayesiana
2	7	22	36	40	45	2.3946
5	10	12	14	25	40	2.3946
5	14	28	40	41	42	2.3946
10	21	22	23	29	40	2.3946

Si bien, se analizaron todos los posibles resultados y se identificaron aquellos números con una mayor probabilidad salir ganadores, es importante resaltar que, dado que se trata de un procedimiento bajo condición de incertidumbre, no existe certeza total en que algunos de estos números serán realmente los ganadores. De hecho, los análisis realizados en este trabajo solo se aplicaron a un subconjunto de resultados que han sido ganadores, según los datos históricos que fueron utilizados.

DISCUSIÓN

A pesar de que existen diversas contribuciones en torno al juego de lotería, la revisión de literatura no permitió identificar trabajos enfocados en el análisis del comportamiento aleatorio de dicho juego de azar usando sistemas Bayesianos. Aunque algunos sistemas predictivos identificados se han basado en el estudio de las falencias o en el análisis probabilístico de una lotería, ninguno de ellos logra establecer algún tipo de tendencia en este tipo de sistema aleatorio. En contraste, usando el clasificador Bayesiano, en el presente trabajo se identifica un conjunto de números con mayor probabilidad de ser ganadores. No obstante si se analiza la Figura 2, esta presenta 4 picos más, los cuales pueden representar números con alta probabilidad de resultar ganadores. Sin embargo, si todos estos números son analizados, la Tabla 2 podría crecer considerablemente.

Teniendo en cuenta que la metodología es aplicable a otro tipo de sistemas aleatorios, futuros trabajos en esta materia pueden apoyarse en el uso de clasificadores Bayesianos. Problemáticas relacionadas con el número de accidentes automovilísticos, la transmisión de enfermedades virales, el número y clases de delitos cometidos, entre otros, pueden ser abordadas con la metodología que aquí se propone. Esta metodología deberá empezar por identificar los datos necesarios, que permitan definir los pasos 1 y 2 de la metodología propuesta, con el fin de que las ecuaciones Bayesianas de entrenamiento puedan ser construidas. Una vez definidas estas ecuaciones, las mismas serán validadas por medio de una base de datos de prueba, con el fin de establecer la efectividad del sistema.

Al igual que en el presente trabajo, estos sistemas presentan escasez de datos que pueden ser tratados a través de un sistema Bayesiano basado en el comportamiento de sus variables independientes (causas), para establecer una relación entre estas sus consecuencias (variables dependientes). Este tipo de análisis serían de gran utilidad para analizar el comportamiento y posibles tendencias que estos sistemas puedan tener al ser observados en una escala real, no solo en la esfera de las decisiones de carácter público, sino también en las decisiones empresariales.

CONCLUSIONES

En este artículo, se propone una función bayesiana de una sola clase, construida con datos de entrenamiento. Los resultados de esta función permitieron construir un diagrama de frecuencia, con el fin de analizar sus tendencias y generar predicciones en el número ganador de lotería. Con base en las funciones bayesianas definidas, se pudo analizar todo el conjunto posible de resultados, identificando el conjunto de números con mayor probabilidad de ser ganadores.

Los resultados generados por el clasificador Bayesiano identificaron una mayor frecuencia, para valores comprendidos en el rango 2.2 y 2.4. Además, cuando se analizó todo el conjunto de posibles números ganadores de esta lotería (8.145.060), se encontró que solo 4 números (ver Tabla 3) presentaba un valor cercano (con una aproximación inferior a 1×10^{-6}) al valor objetivo de 2.3946. Es síntesis, los números con un resultado en la función bayesiana entre 2.2 y 2.4, o aquellos muy cercanos a 2.3946, arrojaron la mayor probabilidad de resultar ganadores. No obstante, por tratarse de un método de predicción sujeto a incertidumbre, no se pueden afirmar con total certeza que algunos de estos resultados será efectivamente un número ganador.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece la colaboración a la Universidad Nacional de Colombia y en especial al Departamento de Ingeniería Industrial de la sede Manizales.

REFERENCIAS

- Bărboianu, C., *The mathematics of lottery, Odds, Combinations, Systems*, Infarom Publishing (2009)
- Beldek, U. y K. Leblebicioğlu, *Local Decision-Making in Multiple Levels for Lottery Data Analysis*, IFAC: Proceedings, 44, 14240–14245 (2011)
- Bikhchandani, S. y U. Segal, *Transitive regret over statistically independent lotteries*, *Journal of Economic Theory*, 152, 237–248 (2014)
- Castrillon, O.; W. Sarache.; E. Castaño, *Sistema Bayesiano para la predicción de la diabetes*, *Información Tecnológica*, 28(6), en prensa (2017)
- Chen, A.C.; Y.H. Yang y F.F. Chen, *A Statistical Analysis of Popular Lottery “Winning” Strategies*, *CS-BIGS*, 4(1), 66–72 (2010)

- Chen, C.L.; M.L. Chiang.; W.C. Lin y D.K. Li, A novel lottery protocol for mobile environments, *Computers & Electrical Engineering*, 49, 146–160 (2016)
- Chow, S.; L.C. Hui.; S.M. Yiu y K.P. Chow, Practical electronic lotteries with offline TTP, *Computer Communications*, 29 (15), 2830–2840 (2006)
- Christou, I.; M. Bakopoulos; T. Dimitriou; E. Amolochitis; S. Tsekeridou y C. Dimitriadis, Detecting fraud in online games of chance and lotteries, *Expert Systems with Applications*, 38(10), 13158–13169 (2011)
- Damianov, D.S., Should lotteries offer discounts on multiple tickets? *Economics Letters*, 126, 84–86 (2015)
- Dennery, C. y A. Direr, Optimal lottery, *Journal of Mathematical Economics*, 55, 15–23 (2014)
- Duda, R.; P.E. Hart y D. Stork, *Pattern Classification*, New York, John Wiley (2001)
- Fu, Q.; J. Lu y Z. Wang, “Reverse” nested lottery contests, *Journal of Mathematical Economics*, 50, 128–140 (2014)
- Harrison, G.W.; J. Martínez-Correa y J.T. Swarthout, Reduction of compound lotteries with objective probabilities, Theory and evidence, *Journal of Economic Behavior & Organization*, 119, 32–55 (2015)
- Hernández, J. y A. Castro, Clasificador Jerárquico de Imágenes utilizando Naive Bayes, Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica. México 2010. Recuperado de: <https://goo.gl/As42XN>, junio (2017)
- Hsu, J.; T.H. Yang y P.S. Sung, SEO firms’ lottery-like characteristics, institutional ownership, and long-run performance, *Journal of Business Research*, 69(6), 2160–2166 (2016)
- Humphreys, B.R. y L. Perez, Syndicated play in lottery games, *The Journal of Socio-Economics*, 45, 124–131 (2013)
- Jabr, B.F, Lottery wins come easy, if you can spot the loopholes, *New scientist*, 211(2826) (2011)
- Kearney, M.S., State lotteries and consumer behavior, *Journal of Public Economics*, 89(11-12), 2269–2299 (2005)
- Lin, H.W. y H.F. Lu, Elucidating the association of sports lottery bettors’ socio-demographics, personality traits, risk tolerance and behavioural biases, *Personality and Individual Differences*, 73, 118–126 (2015)
- Marx, A. y H. Peeters, An unconditional basic income and labor supply: Results from a pilot study of lottery winners, *The Journal of Socio-Economics*, 37(4), 1636–1659 (2012)
- Mesa, L.; M. Lozano y J. Romero, Descripción general de la Inferencia Bayesiana y sus aplicaciones en los procesos de gestión, *La simulación al Servicio de la Academia*, 2, 1-28 (2011)
- Mohammadi, A. y K.A. Nakhaei, Heuristic algorithm for solving the integer programming of the lottery problem, *Scientia Iranica*, 19(3), 895–901 (2012)
- Muñoz, D.F.; D.G. Muñoz y A. Ramírez-López, El Problema del Voceador con Incertidumbre Paramétrica, *Información Tecnológica*, 27 (4) 183-192 (2016)
- Neufeld, E. y S. Goodwin, The 6-49 lottery paradox, *Computational Intelligence*, 14(3) (1998)
- Nishizaki, L.; Y. Ueda y T. Sasaki, Lotteries as a Means of Financing for Preservation of the Global Commons and Agent-Based Simulation Analysis, *Applied Artificial Intelligence*, 19(8), 721–741 (2005)
- Olarte, R. y A. Haghani, Introducing and testing a game-theoretic model for a lottery-based metering system in Minneapolis United States, *Transport policy*, en prensa, (2017)
- Peel, D.A, Heterogeneous agents and the implications of the Markowitz model of utility for multi-prize lottery tickets, *Economics Letters*, 119(3), 264–267 (2013)
- Percy, D.F, A mathematical analysis of badminton scoring systems, *Journal of the Operational Research Society*, 60, 63-71 (2009)

- Rey, D.; Dixit, V.V.; J.L. Ygnace y S.T. Waller, An endogenous lottery-based incentive mechanism to promote off-peak usage in congested transit systems, *Transport Policy*, 46, 46–55 (2016)
- Stephens, D. y M. Crowder, Bayesian analysis of discrete time warranty data, *Series C, Applied Statistic*, 53 (1), 195–217 (2004)
- Van de Ven, N. y M. Zeelenberg, Regret aversion and the reluctance to exchange lottery tickets, *Journal of Economic Psychology*, 32(1), 194–200 (2011)
- Velleman, P., *Robust Non – Linear data smoothers – Theory, definitions, and applications*, Princeton University (1976)
- Wenmackers, S., Ultralarge lotteries: Analyzing the Lottery Paradox using non-standard analysis, *Journal of Applied Logic*, 11(4), 452–467 (2013)
- Yang, A.S, Sentimental relationships between lottery participation and household consumption, *Asia Pacific Management Review*, 21(1), 38–47 (2016)
- Zhang, J.; X.Q. Li; X.T. Zhang y J.F. Gao, Rationality judge and optimization design of lottery scheme, *Applied Mathematics and Computation*, 183(2), 780-786 (2006)