

## Modelo matemático para estimar curvas de intensidad, duración y frecuencia de lluvias extremas en Tunja, Colombia

Zagalo E. Suárez-Aguilar, Omaidá Sepúlveda-Delgado, Miguel Patarroyo-Mesa y Luis C. Canaria-Camargo  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas y Estadística, Tunja  
Colombia (e-mail: zagalo.suarez@uptc.edu.co; omaidá.spúlveda@uptc.edu.co; miguel.patarroyo@uptc.edu.co;  
luis.canaria@uptc.edu.co)

*Recibido Abr. 8, 2019; Aceptado Jun. 10, 2019; Versión final Jul. 25, 2019, Publicado Feb. 2020*

---

### Resumen

Este artículo propone y resuelve un modelo matemático para predecir el comportamiento de la precipitación en la ciudad de Tunja. Para esto, la información pluviométrica se sometió a pruebas de ajuste a funciones de distribución de probabilidad, encontrando la función Gumbel como la óptima. Luego, por tratamientos matemáticos utilizando esta distribución y aplicando el método de regresión lineal múltiple, se determinó la relación entre la intensidad, la duración y la frecuencia de precipitación (IDF). Con el modelo establecido, se representaron las curvas IDF para diferentes periodos de retorno, en función de la duración del evento de precipitación. El procedimiento anterior, se aplicó a los datos de cuatro estaciones que inciden en la cuenca del río que pasa por la ciudad de Tunja, generando información fundamental para la toma de decisiones en el diseño de obras de ingeniería y en la prevención de desastres.

*Palabras clave: hidrología; precipitación; medición hidrológica; drenaje; modelo matemático*

## Mathematical model to estimate curves of intensity, duration and frequency of extreme rains in Tunja, Colombia

### Abstract

This paper proposes and solves a mathematical model to predict the behavior of precipitation in the city of Tunja. For this, pluviometric information was subjected to fitting tests to probability distribution functions, finding the Gumbel function as the optimal one. Then, by means of mathematical treatments that use this distribution and applying the multiple linear regression method, the relationship between intensity, duration and frequency of precipitation (IDF) was determined. With the established model, the IDF curves were plotted for different return periods, depending on the duration of the precipitation event. The previous procedure was applied to the data of four stations that affect the basin that crosses the city of Tunja, generating fundamental information for the decision making in the design of engineering works and in the prevention of disasters.

*Keywords: hydrology; precipitation; hydrological measurement; drainage; mathematical model.*

## INTRODUCCIÓN

Para predecir posibles crecientes, se analizan y aplican métodos hidrológicos que transforman lluvias de diseño en las predicciones buscadas, teniendo en cuenta las condiciones físicas actuales o futuras de las áreas o cuencas objeto de estudio. El proceso comienza con la obtención de las curvas Intensidad–Duración–Frecuencia, (IDF), las cuales representan las características relevantes de las tormentas que ocurren en la zona (Aparicio, 1997; Rodríguez, 2018). Al respecto, Carballo et al. (2013); Quispe (2018), generaron modelos matemáticos IDF para estimar lluvias de diseño, determinando la intensidad de lluvias extremas para varios rangos de duración; Pizarro Tapia et al., (2013) establecieron una plataforma interfaz georeferenciada para procesar información en forma remota con modelos matemáticos para obtener curvas IDF, los datos se tomaron tanto de estaciones pluviográficas (las intensidades máximas se calculan para duraciones desde 15 minutos a 24 horas), como de estaciones pluviométricas que sólo contaban con datos cada 24 horas; Mamun bin Salleh et al. (2018) con datos de precipitación máxima anual, mediante análisis estadístico y técnicas de ajuste de gráficos logarítmicos desarrollaron una correlación entre las precipitaciones de corta duración y los valores de precipitación diaria, analizaron la información de la precipitación para tiempos de 15, 30 y 45 minutos y cuyos porcentajes de lluvia diaria son de 32.4 %, 47.1 % y 57.4 % respectivamente; Manzano et al., (2015) mediante el análisis de los registros diarios de lluvias, diseñaron para México un mapa que muestra la regionalización de la relación entre las intensidades máximas de precipitación en intervalos de 1 y 24 horas (parámetro K) y observan una alta variabilidad espacial de este parámetro en todo el país; y Muñoz y Zamudio (2018) aplican el método de las isolíneas para regionalizar curvas IDF en el departamento de Boyacá, según la relación entre los parámetros que describen una ecuación de estas curvas y su ubicación geoespacial.

Frecuentemente, para obtener estos modelos, se comprueba la homogeneidad, la no estacionariedad de los registros de precipitación correspondientes a diferentes periodos e intervalos de tiempo, se determinan y comparan las curvas IDF utilizando distribuciones de probabilidad y análisis de eventos extremos (López et al., 2018; Acosta y Sierra, 2013; Gutiérrez et al., 2017). Cuando no se dispone de registros suficientes de intensidad de lluvia, se aplican técnicas como: relacionar información por grupos (los máximos diarios anuales, los máximos mensuales y los satelitales de precipitaciones tropicales) (Ayman y Awadallah 2013); establecer relaciones generales entre la intensidad, duración y frecuencia debido a que las propiedades convectivas de las precipitaciones en periodos cortos son similares en diferentes regiones hidrológicas (Kothyari y Ramchandra 1992). Los modelos IDF se aplican para: identificar las zonas más propensas a inundaciones según períodos de retorno de lluvias extremas, sintetizando los períodos críticos (Correa, 2016; Rodríguez, 2018); diseñar la infraestructura necesaria en los sistemas de drenaje y protección contra crecientes (Campos, 2010); analizar los efectos del cambio climático en el comportamiento futuro de las precipitaciones (Rodríguez et al., 2013, Arnbjerg, 2012); solucionar algunos problemas de ingeniería hidráulica, relacionando los períodos de retorno de una tormenta, con la magnitud de las precipitaciones y la distribución tanto espacial como temporal de las mismas (Berríos, 2008). En esta dirección, para analizar la precipitación en un sitio particular, existen básicamente dos métodos con los que se pueden determinar las relaciones entre las variables intensidad I, duración d y período de retorno T. El primero es denominado intensidad-período de retorno, que relaciona estas dos variables por separado mediante alguna de las funciones de probabilidad usadas en hidrología y el segundo, que se utilizó en esta investigación, relaciona simultáneamente las tres variables en una familia de curvas según la ecuación (1), donde las constantes k, m, n y c se calculan mediante un análisis de correlación lineal múltiple entre las variables (Aparicio, 1997; Chen, 1983).

$$I = \frac{kT^m}{(d+c)^n} \quad (1)$$

Pese a la relevancia y a la cantidad de investigaciones en el tema, el problema hidrológico de describir el comportamiento de la precipitación del río Chulo que pasa por la ciudad de Tunja es único, por las particularidades climatológicas de la región. Al respecto, el clima en esta ciudad se clasifica como oceánico, húmedo, cálido y templado, CFB (McKnight Hess, 2000); con promedio de precipitación anual de 917 mm, el mes más seco es enero y el de mayor precipitación es octubre con promedios de 23 mm y 122 mm de lluvia respectivamente; la temperatura media de 12.8 grados centígrados, caracterizada por pequeñas o moderadas oscilaciones térmicas diurnas y anuales; marzo es el mes más cálido del año y junio el mes más frío con temperaturas de 13.7 y 11.9 grados centígrados en promedio; además con una humedad relativa elevada.

Por tanto, el objetivo de la investigación corresponde a generar un modelo para estimar lluvias extremas de diseño en la cuenca inicial de este río. Los resultados son los valores de los parámetros de los modelos que relacionan la intensidad, duración y frecuencia de lluvia, correspondientes a cuatro estaciones climatológicas que inciden en esta cuenca. El estudio contribuye a caracterizar la cuenca del río Chicamocha que es un factor de desarrollo para el sector agrícola, ganadero e industrial de la región central del departamento de Boyacá.

## METODOLOGIA

Para el diseño, desarrollo y simulación del modelo, se realizaron las siguientes etapas: 1) Recolectar y analizar la información de las precipitaciones diarias, medidas por el pluviógrafo y registradas en la estación climatológica de la Facultad de Agronomía de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia ECFAT, para calcular los valores máximos mensuales de precipitación de cada año en el período de estudio, 1967-2016; 2) Calcular la intensidad en mm/h, a partir de los valores de cada serie dividida por su duración (en horas); 3) Evaluar funciones de distribución de probabilidad en los valores de intensidad de precipitación; 4) Determinar qué distribuciones de probabilidad describen mejor la serie histórica de los datos, aplicando pruebas de bondad de ajuste; 5) Obtener el modelo matemático que comprende: calcular las precipitaciones diarias máximas probables para diferentes periodos de retorno, con la función de distribución de probabilidad adoptada; establecer las precipitaciones máximas para tiempos de duración de lluvia de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 18 y 24 horas, como un porcentaje de la precipitación máxima probable para 24 horas, para cada periodo de retorno; obtener los parámetros de la ecuación de intensidad en función de la duración y tiempo de retorno aplicando regresión potencial; 6) Representar y analizar las curvas IDF para diferentes periodos de retorno, obtenidas al simular el modelo matemático; 7) Aplicar el procedimiento para encontrar los valores de los parámetros del modelo en otras estaciones.

## RESULTADOS

Realizadas las etapas descritas en la metodología, se evaluó el modelo matemático con los registros pluviométricos de las intensidades obtenidas de la ECFAT. Los parámetros de ajuste, se obtuvieron a partir de las precipitaciones máximas mensuales en 24 horas de los años de estudio. Con el modelo obtenido se representaron gráficamente las curvas IDF, que son de gran importancia porque permiten calcular la intensidad promedio para cierta probabilidad de excedencia y duración (Maidment, 1993); además, las gráficas evidencian las características de las tormentas de la zona o región con respecto a las variables magnitud, duración y frecuencia (Campos, 1998).

### *Cálculo de precipitaciones máximas mensuales*

Con los registros de las precipitaciones acumuladas diarias expresadas en mm, emitidos por la ECFAT, se calcularon las precipitaciones máximas mensuales en 24 horas, desde el año de 1967 hasta el 2016, las cuales se relacionan en la Tabla 1. La altura de la precipitación diaria fue medida con el pluviógrafo de la estación ECFAT que informa la cantidad de agua lluvia y el tiempo en que esta ha caído. Este consta de un depósito cilíndrico que recoge el agua lluvia a través de un tubo con un embudo exterior de 200 cm<sup>2</sup> de sección, el depósito posee un flotador unido a un brazo que lleva una plumilla para registrar la altura de precipitación a medida que el depósito se llena y el flotador sube; cuándo el pluviógrafo registra un máximo de 10 mm el depósito se vacía completamente y se reinicia el registro.

### *Funciones de probabilidad*

Para seleccionar el modelo matemático que mejor ajuste los datos de precipitación medidos, se analizaron las siguientes funciones de distribución de probabilidad, frecuentemente usadas en hidrología (Abramowitz y Stegum, 1972): *Normal*, *Lognormal*, *Pearson III*, y *Gumbel*.

*Normal*, representada por la ecuación (2) donde  $\mu$  y  $\sigma$  son, respectivamente la media y la desviación estándar, (Kite, 1988):

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-0.5\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt. \quad (2)$$

*Lognormal*, representada por la ecuación (3), con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  dados respectivamente por los logaritmos naturales de la media y la desviación estándar de la variable aleatoria:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \frac{1}{t\beta} e^{-0.5\left(\frac{\ln t - \alpha}{\beta}\right)^2} dt. \quad (3)$$

Tabla 1: Precipitaciones máximas mensuales de 1967 a 2016 (Datos tomados del IDEAM, 2018)

Nº	Año	Mes Máx Prec.	Precipitación (mm)		Nº	Año	Mes máx. Prec.	Precipitación (mm)	
			$x_i$	$(x_i-\bar{x})^2$				$x_i$	$(x_i-\bar{x})^2$
1	1967	6	24.5	55.3238	26	1992	5	31.0	0.8798
2	1968	4	31.7	0.0566	27	1993	5	31.8	0.0190
3	1969	1	31.6	0.1142	28	1994	10	42.4	109.4534
4	1970	10	42.8	117.9830	29	1995	10	66.9	1222.3414
5	1971	7	25.2	45.4006	30	1996	11	23.5	71.1998
6	1972	4	26.5	29.5718	31	1997	10	24.5	55.3238
7	1973	6	24.7	52.3886	32	1998	5	34.0	4.2518
8	1974	3	30.9	1.0774	33	1999	10	29.2	7.4966
9	1975	1	31.6	0.1142	34	2000	6	36.2	18.1646
10	1976	11	25.9	36.4574	35	2001	9	21.1	117.4622
11	1977	4	26.9	25.3814	36	2002	5	41.5	91.4318
12	1978	5	33.3	1.8550	37	2003	11	32.4	0.2134
13	1979	10	37.3	28.7510	38	2004	4	23.8	66.2270
14	1980	9	45.7	189.3926	39	2005	11	32.3	0.1310
15	1981	5	37.2	27.6886	40	2006	4	33.2	1.5926
16	1982	4	23.1	78.1102	41	2007	4	31.1	0.7022
17	1983	12	17.1	220.1662	42	2008	5	24.0	63.0118
18	1984	5	39.5	57.1838	43	2009	5	26.5	29.5718
19	1985	11	42.3	107.3710	44	2010	4	29.1	8.0542
20	1986	10	28.5	11.8198	45	2011	4	37.8	34.3630
21	1987	4	27.6	18.8182	46	2012	4	56.4	598.3894
22	1988	4	34.6	7.0862	47	2013	5	36.6	21.7342
23	1989	3	28.6	11.1422	48	2014	3	34.6	7.0862
24	1990	5	25.5	41.4478	49	2015	2	16.2	247.6846
25	1991	4	28.2	13.9726	50	2016	5	30.0	3.7558

Pearson III o Gamma de tres parámetros, ecuación (4) con parámetros  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  y  $\sigma_1$ , (Kite, 1988):

$$F(x) = \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\beta_1)} \int_{-\infty}^x \left(\frac{t-\sigma_1}{\alpha_1}\right)^{-0.5\left(\frac{t-\sigma_1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1-1}} dt. \tag{4}$$

Gumbel, definida por la ecuación (5) con parámetros estadísticos  $\alpha$  y  $\beta$ ;  $\sigma$  y  $\bar{x}$  son respectivamente la desviación y la media de los datos medidos (Gumbel, 2004):

$$F(x) = e^{-e^{-\frac{(x-\beta)}{\alpha}}}, \alpha = \frac{\sqrt{6}}{\pi} * \sigma, \beta = \bar{x} - 0.5772 * \alpha. \tag{5}$$

*Pruebas de homogeneidad y ajuste*

*Prueba de homogeneidad Estándar (SNHT).* Es una prueba paramétrica, que asume la hipótesis nula como la homogeneidad de la serie y la hipótesis alterna como la existencia de una fecha en la que hay un cambio en la media de la serie. La prueba estadística T(k), está definida por la ecuación (6) (Alexandersson, 1986).

$$T(k) = k\bar{z}_1^2 + (n-k)\bar{z}_2^2, \quad k=1, \dots, n \tag{6}$$

Donde  $\bar{z}_1$  y  $\bar{z}_2$ , definidas por la ecuación (7), son las medias de los primeros k años y de los últimos n-k años de la serie que son comparadas.

$$\bar{z}_1 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{x_i - \bar{x}}{s} \quad \text{y} \quad \bar{z}_2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \frac{x_i - \bar{x}}{s} \tag{7}$$

T(k) alcanza su valor máximo cuándo hay un punto de cambio ubicado en el año k. El estadístico de prueba  $T_0$  se define en la ecuación (8).

$$T_0 = \max T(k), \quad 1 \leq k \leq n \tag{8}$$

Si  $T_0$  es superior al valor crítico, la hipótesis nula se rechaza. Los valores críticos dependen del tamaño de la muestra cómo se relaciona en la Tabla 2.

Tabla 2: Valores críticos del estadístico  $T_0$  de la prueba de homogeneidad normal estándar en función del tamaño de muestra ( $n$ ). (Datos tomados de (Alexandersson y Moeberg, 1997))

n	20	30	40	50	70	100
1%	9.56	10.45	11.01	11.38	11.89	12.32
5%	6.95	7.65	8.10	8.45	8.80	9.15

Para la serie de precipitaciones máximas mensuales,  $n=50$ , el valor máximo de  $T(k)$  es  $T_0 = 2.01397$  y se registró en el año 2014,  $k=48$ , lo cual sugiere un punto de cambio en la serie y según los valores de la Tabla 2,  $T_0 < T_{0 \text{ crítico}}$ . Por tanto, el punto de cambio detectado en el año 2014 no es estadísticamente significativo y se deduce que la serie se considera homogénea.

Para evaluar el ajuste de las funciones de distribución de probabilidad a los datos, se sometió la información a las pruebas: *Error cuadrático mínimo*, *Ji cuadrada  $\chi^2$* , *Kolmogorov-Smirnov* y la eficiencia de Nash-Sutcliffe.

*Error cuadrático mínimo.* Con los valores observados  $x_{o_i}$  y los estimados teóricamente  $x_{e_i}$ , para cada función de distribución, se procedió a calcular este error según la fórmula (9) los resultados están en la Tabla 3.

$$D = \min \left\{ \|X_o - X_e\| = \left( \sum_{i=1}^n (x_{o_i} - x_{e_i})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{9}$$

Tabla 3: Cálculos para obtener el error cuadrático entre las funciones de probabilidad

i	T. años	$x_{o_i}$	Normal		Lognormal		Pearson III		Gumbel	
			$x_{e_i}$	$(x_{o_i} - x_{e_i})^2$	$x_{e_i}$	$(x_{o_i} - x_{e_i})^2$	$x_{e_i}$	$(x_{o_i} - x_{e_i})^2$	$x_{e_i}$	$(x_{o_i} - x_{e_i})^2$
1	51.00	66.9	50.55	267.49	52.76	199.92	58.89	64.15	55.38	132.71
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	1.02	16.20	13.42	7.72	18.09	3.56	24.17	63.47	18.30	4.40
	$\ X_o - X_e\ $			22.7		17.24		16.21		14.65

*Ji cuadrada  $\chi^2$ .* Para esta prueba se dividieron los datos en  $k=7$  intervalos de clase (Tabla 4) donde  $\theta_i$  es el número observado en el intervalo  $i$ .

Tabla 4: intervalos de clase

Intervalo, i	Límite Inferior, Li	Límite Superior, Ls	Marca de clase, $X_i$	Número observado $\theta_i$
1	16.2.	24.2	20.2	7
2	24.2	32.2	28.2	23
3	32.2	40.2	36.2	13
4	40.2	48.2	44.2	5
5	48.2	56.2	52.2	0
6	56.2	64.2	60.2	1
7	64.2	72.2	68.2	1

En este caso, se calcula el valor del número esperado de eventos en el mismo intervalo  $\epsilon_i$ , según la ecuación (10), donde  $F(S_i)$  y  $F(L_i)$  es la función de distribución de probabilidad evaluada en el límite superior e inferior del intervalo  $i$  respectivamente y  $n$  es el número de datos.

El estadístico  $D_c$  se calculó con la ecuación (11), obteniendo los siguientes valores para cada distribución: Normal, 131.48; Lognormal, 12.50; Pearson III, 50.76; y Gumbel, 6.67.

$$\epsilon_i = n[F(S_i) - F(L_i)], \quad i=1,2,\dots,k. \tag{10}$$

$$D_c = \sum_{i=1}^k \frac{(\theta_i - \epsilon_i)^2}{\epsilon_i}. \tag{11}$$

Calculados los parámetros  $D_c$ , se determina el valor de una variable aleatoria con distribución  $\chi^2$ , para  $v=k-1-m$  grados de libertad y un nivel de significancia  $\alpha$ , donde  $m$  es el número de parámetros estimados para cada distribución. Para aceptar una función de distribución de probabilidad, el parámetro  $D_c$  correspondiente, debe cumplir la condición descrita por la expresión (12).

$$D_c \leq \chi^2_{1-\alpha, k-1-m} \tag{12}$$

*Kolmogorov-Smirnov.* Compara el máximo valor absoluto de la diferencia  $D_K$  entre la función de distribución observada  $F_o(x_m)$  y la estimada  $F(x_m)$ , según la ecuación (13), con un valor crítico  $d$  que depende del número de datos y el nivel de significancia seleccionado (Benjamin y Cornell, 1970; Simard y L'Ecuyer, 2011).

$$D_K = \max |F_o(x_m) - F(x_m)| \tag{13}$$

En esta prueba, si  $D_K < d$ , se acepta la hipótesis nula, es decir, se acepta la función de distribución de probabilidad. Para esta prueba, la función de distribución de probabilidad observada se calcula mediante la ecuación (14), donde  $m$  es el orden del dato  $x_m$  en la lista ordenada de mayor a menor y  $n$  es el número total de datos:

$$F_o(x_m) = 1 - \frac{m}{n+1}. \tag{14}$$

Al aplicar esta prueba, en la Tabla 5 se resumen los cálculos según la ecuación (10), con  $n=50$  datos y un nivel de significancia del 5 % se obtiene un valor crítico  $d=0.1923$ , que al compararlo con los valores  $D_K$ , números subrayados de la Tabla 5, se infiere que se aceptan la funciones de probabilidad Lognormal, Gumbel, Normal y se rechaza la función Pearson.

Tabla 5: Cálculo del estimador  $D_K$ , para la prueba de Kolmogorov Smirnov

m	$x_m$ (mm)	Normal			Lognormal		Pearson III		Gumbel	
		$F_o(x_m)$	$F(x_m)$	$ F_o-F $	$F(x_m)$	$ F_o-F $	$F(x_m)$	$ F_o-F $	$F(x_m)$	$ F_o-F $
1	66.9	0.9804	0.9999	0.0196	0.9986	0.0182	0.9917	0.0113	0.9962	0.0158
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
14	34.6	0.7255	0.6164	<u>0.1091</u>	0.6709	<u>0.0546</u>	0.7353	0.0098	0.6811	0.0444
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
47	23.1	0.0784	0.1628	0.0843	0.1322	0.0537	-0.0881	0.1730	0.1379	<u>0.0594</u>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	16.2	0.0196	0.0400	0.0204	0.0065	0.0131	-1.0856	<u>1.2467</u>	0.0050	0.0146

*Eficiencia de Nash-Sutcliffe.* El criterio se define en la ecuación (15) y mide cuánto de la variabilidad de las observaciones es explicada por la función de probabilidad. Algunos valores sugeridos para la toma de decisiones son resumidos en la Tabla 6 (Nash y Sutcliffe, 1970).

$$E = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_{o_i} - x_{e_i})^2}{\sum_{i=1}^n (x_{e_i} - \bar{x_e})^2} \tag{15}$$

Tabla 6: Valores referenciales del Criterio de Nash-Sutcliffe (Datos tomados de Molnar, 2011 (Molnar, 2011))

E	Ajuste
<0.2	Insuficiente
0.2-0.4	Satisfactorio
0.4-0.6	Bueno
0.6-0.8	Muy Bueno
>0.8	Excelente

Los valores del criterio de Nash- Sutcliffe (E) obtenidos para cada distribución, según la ecuación (15), son los siguientes: Normal, 1.0099; Lognormal, 1.0060; Pearson III, 1.0053; y Gumbel, 1.0043.

### Selección de la función de distribución

En la Tabla 7, se presenta el resumen de las calificaciones de las funciones de distribuciones de probabilidad según las pruebas aplicadas, asignando el valor de 1 a la "mejor" y 5 a la "peor". De estos resultados se infiere que el orden en que mejor se ajustan las funciones de probabilidad a los datos corresponde a: 1) Gumbel, 2) Lognormal, 3) Pearson III y 4) Normal. Por esta razón, para calcular las curvas IDF, se toma la decisión de aplicar la distribución Gumbel.

Tabla 7: Pruebas de bondad del ajuste de los datos a las funciones de distribución de probabilidad

Función	Error Cuadrático mínimo	Ji Cuadrado $\chi^2$	Kolmogorov-Smirnov	Eficiencia de Nash-Sutcliffe
Normal	4	4	3	4
Lognormal	3	2	1	3
Pearson III	2	3	4	2
Gumbel	1	1	2	1

### Cálculo de las curvas IDF

La primera fase para hallar las curvas IDF, corresponde a calcular la precipitación máxima probable Pd, a partir de la precipitación máxima mensual por año medida por el pluviómetro, representada por  $x_i$  en la Tabla 1. Según estos datos, el promedio de la precipitación máxima mensual es  $\bar{x}=31.9380$  mm, la desviación estándar es  $S=8.9889$  mm y los valores de los coeficientes según la ecuación (5) corresponden a los relacionados en (16).

$$A = \frac{\sqrt{6}}{\pi} * S = 7,0086 \text{ y } \mu = \bar{x} - 0.5772 * \alpha = 27,8926. \quad (16)$$

En la Tabla 8 se presentan las precipitaciones máximas probables para diferentes períodos de retorno  $T_r$ , la variable reducida está dada por la ecuación (17) la precipitación es  $XT' = \mu + \alpha \cdot YT$  y la probabilidad de ocurrencia de la precipitación se obtiene al aplicar la función Gumbel ecuación (5), con los parámetros  $XT'$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ . La columna 5, corresponde a la corrección del intervalo fijo  $XT = XT' \cdot 1.13$ , según el estudio de proporción de lluvia máxima verdadera de intervalo fijo (Weiss, 1964), valor que se utilizó en la investigación.

$$YT = -\ln\left(\ln\left(\frac{T_r}{T_r - 1}\right)\right) \quad (17)$$

Tabla 8: Cálculo de las precipitaciones diarias máximas probables para diferentes períodos de retorno

Período retorno $T_r$ (años)	Variable reducida YT	Precipitación $XT'$ (mm)	Probabilidad de ocurrencia $F(XT')$	Corrección intervalo fijo XT (mm)
2	0.3665	30.4613	0,900	49.3409
5	1.4999	38.4051	0,960	56.8502
10	2.2504	43.6645	0,980	62.4210
25	3.1985	50.3099	0,990	67.9506
50	3.9019	55.2398	0,998	80.7288
100	4.6001	60.1333	0,900	49.3409

### Ecuación de intensidad

Las relaciones o cocientes de lluvia de 24 horas que se emplean para duraciones de varias horas, son los propuestos en Campos (1978) y que se relacionan en Tabla 9.

Tabla 9: Valores para las relaciones a la lluvia de duración 24 horas (Datos tomados de Campos (1978))

Duraciones en horas									
1	2	3	4	5	6	8	12	18	24
0.3	0.39	0.46	0.52	0.57	0.61	0.68	0.80	0.91	1

El cálculo de la precipitación máxima para diferentes tiempos de duración, se presenta en la Tabla 10, que corresponde a los porcentajes de la precipitación máxima probable en 24 horas (establecidos en la Tabla 9), para cada período de retorno.

Tabla 10: Precipitaciones máximas para diferentes tiempos de lluvias

Tiempo duración. horas	Cociente	Precipitación máxima Pd (mm) por tiempos de duración de lluvias					
		2 años	5 años	10 años	25 años	50 años	100 años
24	X <sub>24</sub> =100 %	34.4214	43.3978	49.3410	56.8502	62.4210	67.9506
18	X <sub>18</sub> =91 %	31.3234	39.4920	44.9003	51.7337	56.8031	61.8351
12	X <sub>12</sub> =80 %	27.5371	34.7182	39.4728	45.4802	49.9368	54.3605
8	X <sub>18</sub> =68 %	23.4065	29.5105	33.5519	38.6582	42.4463	46.2064
6	X <sub>6</sub> =61 %	20.9970	26.4727	30.0980	34.6786	38.0768	41.4499
5	X <sub>5</sub> =57 %	19.6202	24.7367	28.1244	32.4046	35.5800	38.7319
4	X <sub>4</sub> =52 %	17.8991	22.5669	25.6573	29.5621	32.4589	35.3343
3	X <sub>3</sub> =46 %	15.8338	19.9630	22.6969	26.1511	28.7137	31.2573
2	X <sub>2</sub> =39 %	13.4243	16.9251	19.2430	22.1716	24.3442	26.5008
1	X <sub>1</sub> =30 %	10.3264	13.0193	14.8023	17.0551	18.7263	20.3852

#### Intensidades de lluvia a partir de Pd, según duración de precipitación y frecuencia de la misma

La intensidad es la tasa temporal de precipitación, la profundidad por unidad de tiempo (mm/h); comúnmente se utiliza la intensidad promedio, ecuación (18), donde P es la profundidad de lluvia en (mm) y Td es la duración en horas. La frecuencia se expresa en función del período de retorno T<sub>r</sub> (ver Tabla 11).

$$i = \frac{P}{T_d} \quad (18)$$

Tabla 11: Cálculo de la intensidad de lluvia en mm/h en la ciudad de Tunja

Tiempo de duración		Intensidades de lluvia (mm/h) según período de retorno					
horas	minutos	2 años	5 años	10 años	25 años	50 años	100 años
24	1440	1.4342	1.8082	2.0559	2.3688	2.6009	2.8313
18	1080	1.7402	2.1940	2.4945	2.8741	3.1557	3.4353
12	720	2.2948	2.8932	3.2894	3.7900	4.1614	4.5300
8	480	2.9258	3.6888	4.1940	4.8323	5.3058	5.7758
6	360	3.4995	4.4121	5.0163	5.7798	6.3461	6.9083
5	300	3.9240	4.9473	5.6249	6.4809	7.1160	7.7464
4	240	4.4748	5.6417	6.4143	7.3905	8.1147	8.8336
3	180	5.2779	6.6543	7.5656	8.7170	9.5712	10.4191
2	120	6.7122	8.4626	9.6215	11.0858	12.1721	13.2504
1	60	10.3264	13.0193	14.8023	17.0551	18.7263	20.3852

El modelo matemático descrito por la ecuación (19) relaciona simultáneamente: la intensidad máxima de precipitación  $i$  en mm/hr, la duración de la precipitación  $t$  en minutos, la frecuencia en función del período de retorno  $T$  y los parámetros  $K$ ,  $m$ ,  $n$ , que dependen de la zona de estudio.

$$i = \frac{KT^m}{t^n} \quad (19)$$

Para calcular los valores de  $K$ ,  $m$ ,  $n$ , se aplica la regresión lineal múltiple a la ecuación  $i=dt^{-n}$ , obtenida al reemplazar  $d=KT^m$  en la ecuación (19), obteniendo los valores para  $d$ ,  $n$  y el coeficiente de correlación  $R$ , para cada período de retorno, como se presenta en la Tabla 12 y en la Fig. 1.



Tabla 12: Regresión potencial por el método de distribución de Gumbel para un período de retorno de 2 años

Período de retorno, T=2 años						
No	t	i	ln t	ln i	ln t * ln i	(ln t) <sup>2</sup>
1	1440	1.4342	7.2724	0.3606	2.6226	52.8878
2	1080	1.7402	6.9847	0.5540	3.8695	48.7863
3	720	2.2948	6.5793	0.8306	5.4649	43.2865
4	480	2.9258	6.1738	1.0736	6.6280	38.1156
5	360	3.4995	5.8861	1.2526	7.3731	34.6462
6	300	3.9240	5.7038	1.3671	7.7978	32.5331
7	240	4.4748	5.4806	1.4985	8.2125	30.0374
8	180	5.2779	5.1930	1.6635	8.6387	26.9668
9	120	6.7122	4.7875	1.9039	9.1150	22.9201
10	60	10.3264	4.0943	2.3347	9.5591	16.7637
d=130.1307, n=0.6163, R=-0.999719						

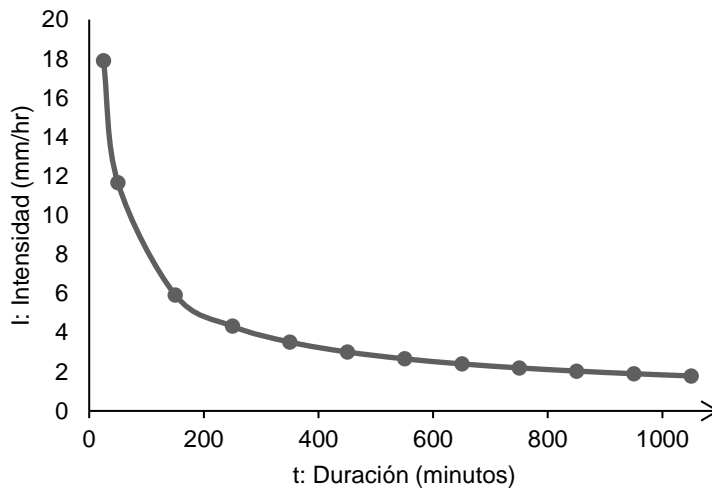


Fig. 1: Gráfica de la función intensidad de lluvia un período de retorno de 2 años

Un proceso similar se realizó para los periodos de retorno T de 5, 10, 25, 50 y 100 años. Los valores d y n se resumen en la Tabla 13.

Tabla 13: Resumen de aplicación de regresión

Período de Retorno	Término constante de regresión d	Coefficiente de regresión n
2	130.1307	0.6163
5	164.0666	0.6163
10	185.5348	0.6163
25	214.9237	0.6163
50	235.9841	0.6163
100	256.8891	0.6163

Con los valores de la Tabla 13, se realizó otra regresión potencial entre las columnas del período de retorno T y el término constante de regresión d, Tabla 14, Fig. 2.

Tabla 14: Regresión potencial,  $d=KT^m$ , T período de retorno

Regresión potencial						
No	T	d	ln T	ln d	ln T * ln d	(ln T) <sup>2</sup>
1	2	130.1307	0.69315	4.8685	3.3746	0.48045
2	5	164.0666	1.60944	5.1003	8.2086	2.59029
3	10	185.5348	2.30259	5.2286	12.0393	5.30190
4	25	214.9237	3.21888	5.3703	17.2863	10.36116
5	50	235.9841	3.91202	5.4638	21.3744	15.30392
6	100	256.8891	4.60517	5.5486	25.5525	21.20759

K= 126.8174, m= 0.1508

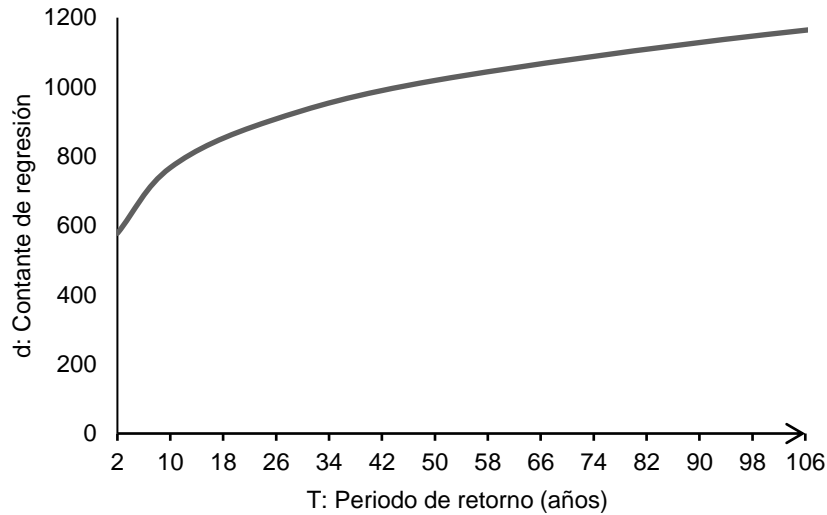


Fig. 2: Gráfica de la regresión  $d=KT^m$

Para  $d=KT^m$  se encuentran los valores:  $K= 126.8174$ ,  $m= 0.1508$  y  $n= 0.6163$ . Por consiguiente, el modelo matemático que describe el comportamiento de las precipitaciones para la zona de influencia de la ECFA se representa por la ecuación (20).

$$I = \frac{KT^m}{t^n} = \frac{126.8174 * T^{0.1508}}{t^{0.6163}} \tag{20}$$

En la Tabla 15, se presentan los valores de la intensidad I en mm/min para diferentes tiempos de duración t en minutos y correspondientes a períodos de retorno T en años, como resultado de aplicar el modelo descrito por la ecuación (14). En la Fig. 3, se presentan las curvas IDF, generadas a partir de este modelo, que se comportan como funciones decrecientes en la intensidad a medida que aumenta el tiempo de duración del evento de lluvia.

Tabla 15: Valores de Intensidad de precipitación según duración y frecuencia de precipitación

Valores de Intensidad de precipitación						
Duración (minutos)	Período de retorno (años)					
	2	5	10	25	50	100
60	11.29	12.96	14.39	16.52	18.34	20.36
80	9.45	10.85	12.05	13.83	15.36	17.05
100	8.24	9.46	10.50	12.06	13.38	14.86
120	7.36	8.45	9.38	10.77	11.96	13.28
140	6.69	7.68	8.53	9.79	10.87	12.41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1440	1.59	1.83	2.03	2.33	2.59	2.87

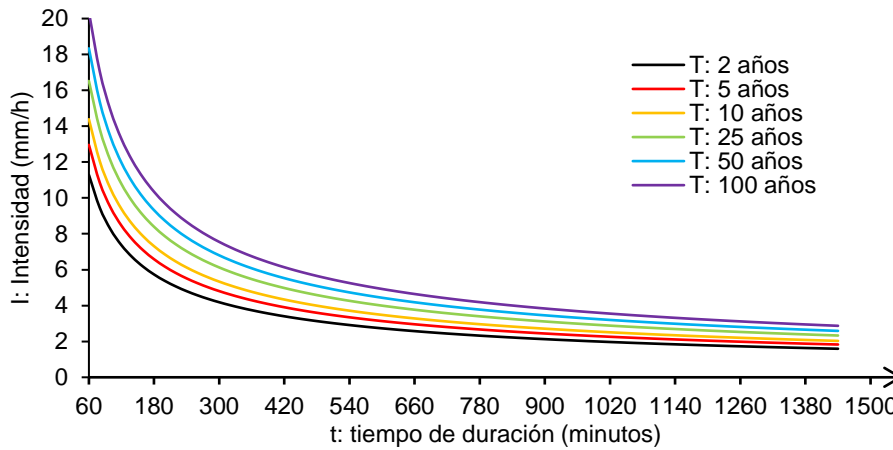


Fig. 3. Curvas IDF, de la cuenca con datos de precipitación máxima en 24 horas

Respecto a los resultados obtenidos en el modelo de la ecuación (20), por ejemplo para un período de retorno T de 2 años y una duración de 60 minutos, la intensidad de una lluvia es 11.29 mm/h. Esto se interpreta que en promedio un evento de lluvia con una intensidad de 11.29 mm/h mayor y de duración de 60 minutos se presenta en una vez cada 2 años.

La curva IDF para un período de retorno dado se interpreta como una curva masa de precipitación, por ejemplo para el caso particular de T=2 años, resulta de la ecuación (20) que  $i=140.7926t^{-0.61638}$  y a partir de esta expresión se obtiene la altura de precipitación para este periodo, según la ecuación (21). La gráfica de la altura de precipitación en función del tiempo de duración se representa en la Fig. 4.

$$I_{hp} = i \frac{t}{60} = 2.3465t^{0.3836} \tag{21}$$

Los procedimientos anteriores se aplicaron a datos de las estaciones Chiquiza, el Encanto y Cómbita, que inciden en la cuenca del río Chulo, que pasa por la ciudad de Tunja, obteniendo los valores de los parámetros K, m, n del modelo matemático según lo descrito por la ecuación (19), el coeficiente de determinación R<sup>2</sup> y se resume en la Tabla 16.

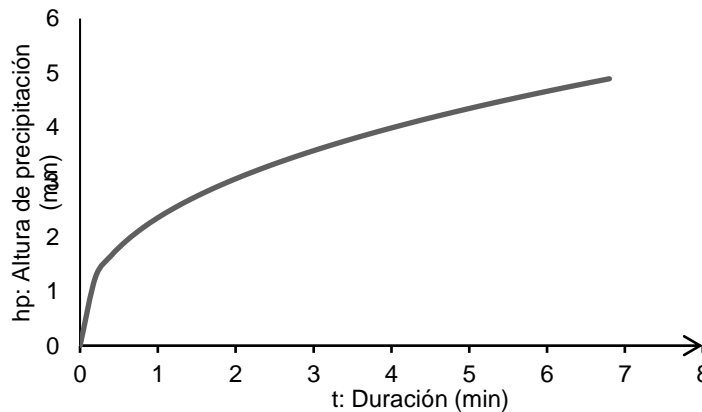


Fig. 4. Gráfica de altura de precipitación

Tabla 16. Valores de los parámetros, K,m,n de otras estaciones climatológicas

Estación. Municipio	Latitud	Longitud	Elevación m.s.n.m	Periodo	Años	Modelo: $I = \frac{KT^m}{t^n}$	Coficiente de determinación R <sup>2</sup>
Chiquiza. San Pedro de Iguaque	5° 38' N	73° 27' w	2985	1980-2016	37	$I = \frac{168.7070T^{0.1488}}{t^{0.6164}}$	0.9696
ECFA. Tunja.	5° 33' N	73° 24' w	2690	1967-2016	50	$I = \frac{126.8174T^{0.1508}}{t^{0.6164}}$	0.9688

Tabla 16 (continuación)

Estación. Municipio	Latitud	Longitud	Elevación m.s.n.m	Periodo	Años	Modelo: $I = \frac{KT^m}{t^n}$	Coefficiente de determinación $R^2$
El Encanto. Oicatá	5° 36' N	73° 19' W	2645	1992- 2017	26	$I = \frac{153.6255T^{0.1445}}{t^{0.6164}}$	0.9712
Cómbita. Cómbita	5° 37' N	73° 19' W	2820	1958- 2016	59	$I = \frac{152.0939T^{0.1909}}{t^{0.6164}}$	0.9506

## DISCUSION

Respecto a las siguientes características de la precipitación desde el punto de vista hidrológico que inciden en el uso y control del agua en la cuenca del río que pasa por la ciudad de Tunja: altura o intensidad, su distribución en el espacio y en el tiempo, y la frecuencia o probabilidad de ocurrencia; en esta investigación se relacionó la intensidad, la distribución en el tiempo y la frecuencia. Por consiguiente, se requiere continuar el estudio para establecer la relación entre la intensidad con la distribución en el espacio y la intensidad con la distribución en el espacio y el tiempo. Sobre la metodología para determinar las curvas IDF, en el estudio de (Acosta y Sierra, 2013) aplicaron el método de intensidad-período de retorno, mientras que en esta investigación se relacionan simultáneamente las tres variables como se presenta en la Tabla 17. Estos dos estudios coinciden en que la función de distribución Gumbel, es la mejor que representa los datos y fue la utilizada para desarrollar estos trabajos.

Al respecto, el IDEAM para estimar las curvas IDF, los datos de intensidades son ajustados a la distribución de probabilidad Gumbel y el modelo adoptado es el propuesto en la ecuación (22), para estimar los parámetros utilizan el método L-momentos y son calculados para diferentes periodos de retorno y duraciones.

$$I_{IDEAM} = \frac{C1}{(D+X0)^{C2}} \quad (22)$$

En particular, los parámetros obtenidos del modelo IDF para la estación UPTC código 2403513 en la ventana de observación de 1968 a 2010, son los relacionados en la Tabla 17, los resultados de las intensidades estimados en la investigación y los presentados por el IDEAM, son similares para los periodos de retorno y duración correspondientes con una diferencia entre estos dos de  $||I_{IDEAM}-I||=137.8430$ .

Tabla 17. Valores de los parámetros del modelo (22) de la estación U.P.T.C (Datos tomados de curvas IDF estación UPTC IDEAM)

TR (años)	C1	X0	C2
2	1788.79	22.8	1.034
3	1918.463	19.685	1.027
5	2117.39	17.561	1.025
10	2406.59	15.888	1.025
25	2803.777	14.574	1.027
50	3111.325	13.912	1.029
100	3423.42	13.415	1.031

Sin embargo, ajustando la corrección del intervalo fijo como  $XT=XT' \cdot 2.375$ , se encuentran los valores de los parámetros de la ecuación (23) mejorando una aproximación entre las intensidades de  $||I_{IDEAM}-I_{2.375}||=23.7628$

$$I_{2.375} = \frac{KT^m}{t^n} = \frac{266.5409 \cdot T^{0.1508}}{t^{0.6163}} \quad (23)$$

Los resultados teóricos que genera el modelo (20) son aceptables y son los esperados, como se puede verificar al revisar los datos en las Tablas 11 y 15. Respecto a la comparación con otros modelos IDF, se observa por ejemplo: para un evento de lluvia de duración de una hora y para un periodo de retorno de 25 años, en (Correa, 2016) la intensidad para la cuenca del noroeste de Guayaquil Ecuador es de 251.54 mm/h, en (Carballo, Paredes, y Guevara, 2013) la intensidad para la región del estado Cojedes Venezuela es de 1.81 mm/h y para la ciudad de Tunja Colombia es 34.71mm/h. Por esta razón, se evidencian diferencias significativas de la precipitación, debido las múltiples variables que inciden en esta como: la posición geográfica, la altitud, la influencia del cambio climático, periodos de lluvia, crecimiento expansivo de las ciudades, entre otras.

Finalmente, las implicaciones de este estudio permitirán establecer modelos regionales de precipitación de la cuenca del río Chicamocha que incide en la región central del Boyacá, ubicar zonas propensas a inundaciones, determinar la probabilidad de la intensidad de las precipitaciones para estimar la suficiencia de la necesidad de agua de cultivos de papa y pasto (Sepúlveda et al., 2015), cebada, trigo, maíz, hortalizas, y de esta manera contribuir a la acertada toma de decisiones para la inversión agrícola y ganadera.

## CONCLUSIONES

De los resultados mostrados, de su análisis y de su discusión, se pueden obtener las siguientes conclusiones, del modelo IDF de lluvias para la ciudad de Tunja: 1) la característica principal de la metodología empleada, radica en la posibilidad de predecir la ocurrencia de eventos de lluvia que son complejos e imposibles de estimarlos de manera confiable por métodos basados en las leyes de la mecánica o la física; 2) los procedimientos utilizados son de fácil aplicación, ya que basta con disponer de los datos de precipitación, aplicar funciones de probabilidad, regresión potencial y tratamientos matemáticos para obtener los parámetros del modelo; 3) los resultados obtenidos por este método son comparables dentro de intervalos estadísticamente aceptables con otros modelos de lluvia y no deben aceptarse dogmáticamente, asumiendo la disponibilidad de registros porque entre mayor número de registros los resultados serán más confiables; y 4) la metodología empleada para encontrar el modelo puede ser aplicada para analizar otras variables que inciden en el comportamiento del clima.

## REFERENCIAS

- Abramowitz, M. y I. Stegun., *Handbook of mathematical functions*, 2ª Ed., 925-997, Dover Publications INC, New York, USA (1972).
- Acosta P. M. y L. Sierra, *Evaluación de métodos de construcción de curvas IDF a partir de distribuciones de probabilidad y parámetros de ajuste*. Revista Facultad de Ingeniería, UPTC, 22(35), 25-33 (2013).
- Alexandersson, H., *A homogeneity test applied to precipitation data*, doi:0.1002/joc.3370060607, Journal of Climatology, 6, 661-675 (1986).
- Alexandersson, H. y A. Moberg, *Homogenization of Swedish temperature data Part I: Homogeneity test for linear trends*. International Journal of Climatology, 17, 25-34 (1997).
- Aparicio, F. J., *Fundamentos de Hidrología de Superficie*, 1ª Ed., Limusa, México, D. F., México. (1997)
- Ambjerg, K., *Quantification of climate change effects on extreme precipitation used for high resolution hydrologic design*, doi:10.1080/1573062X.2011.630091, Urban Water Journal, 9(2), 57-65 (2012).
- Awadallah A. G. y N. A. Awadallah, *A Novel Approach for the Joint Use of Rainfall Monthly and Daily Ground Station Data with TRMM Data to Generate IDF Estimates in a Poorly Gauged Arid Region*, doi: 10.4236/ojmh.2013.31001, Open Journal of Modern Hydrology, 3, 1-7 (2013).
- Benjamin, J. R. y C. A. Cornell, *Probability, Statistics and Decisions for Civil Engineers*, Dover Publications, New York, USA (1970).
- Campos, D. F., *Rainfall Maximum Intensities for Urban Hydrological Design in Mexican Republic*. Ingeniería Investigación y Tecnología, XI(2), 179-188 (2010).
- Campos, D. F., *Cálculo de las curvas IDF, a partir de registros de lluvia máxima en 24 horas y Relaciones Duración LLuvia Promedio*. 1ª Ed., Subdirección Regional Noreste de Obras Hidráulicas e Ingeniería Agrícola para el Desarrollo Rural. San Luis de Potosí, Mexico (1978).
- Carballo, N.; T. F. Paredes y E. Guevara, *Modelos matemáticos para la estimación de lluvias de diseño*, 1ª Ed., Editorial Académica Española, Lexington KY, USA (2013).
- Chen, C., *Rainfall Intensity-Duration-Frequency Formulas*, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1983)109:12(1603), Journal of Hydraulic Engineering, 109(12), 1603-1621 (1983).
- Correa, H., *Factores físicos que influyen en la ocurrencia de crecidas extremas*. 1ª Ed., Editorial Académica Española, Berlín, Alemania (2016).
- Gumbel, E. J., *Statistics of Extremes*, Dover Publications, Inc. New York, USA (2004).
- Kite, G. W., *Frequency and risk analysis in hidrology*. Water Resources Publications, For Collins, USA (1988).
- Kothiyari, U. C. y J. G. Ramchandra, *Rainfall Intensity-Duration-Frequency Formula for India*, doi: 10.1061/(ASCE)0733-9429, Journal of Hydraulic Engineering, 118(2), 323-336 (1992).
- Maidment, D. R., *Hydrologic Modeling, in Environmental Modeling with GIS*. Oxford University Press, 47-167 (1993).
- Mamun, A.; H. Noor y N. Bin Salleh, *Estimation of short-duration rainfall intensity from daily rainfall values in Klang Valley, Malaysia*. doi: 10.1007/s13201-018-08, Applied Water Science, 8, 202-212 (2018).

- Manzano, F.; A. Zapata; C. Fernández y A. García, Extreme rainfall relationship in Mexico, doi:10.1080/17445647.2014.945105, *Journal of Maps*, 11(3), 405-4014 (2015).
- Muñoz, B. J. y H. Zamudio, *Regionalización de ecuaciones para el cálculo de curvas de intensidad, duración y frecuencia mediante mapas de isolíneas en el departamento de Boyacá*, doi:10.14483/22487638.14295, *Tecnura*, 22(58), 53-64 (2018).
- Nash, J. y J. Sutcliffe, *River flow forecasting through conceptual models part I A discussion of principles*, doi:10.1016/0022-1694(70)90255-6, *Journal of Hydrology*, 282–290 (1970).
- Pizarro, R., A. Abarza y otros doce autores, *Curvas Intensidad-Duración-Frecuencia para las regiones Metropolitana, Maule y Biobío. Intensidades desde 15 minutos hasta 24 horas*. Santiago de Chile: Unesco. (2013).
- Quispe, J., *IDF curves for the Viacha weather station, La Paz city*. *Revista de Investigación e Innovación Agropecuaria y de Recursos Naturales*, 5(1), 99-105 (2018).
- Rodríguez, R., X. Navarro y otros cinco autores, *Influence of climate change on IDF curves for the metropolitan area of Barcelona (Spain)*, doi: 10.1002/joc.3712, *International Journal of Climatology*, 34(1), 643–654 (2013).
- Rodríguez, S., *Simulación dinámica de inundaciones asumiendo escorrentía, bajo períodos de retorno, Quebrada la Virgen del municipio de Santander*. *Revista UIS Ingenierías*, 17(1), 251-270 (2018).
- Sepúlveda, O., Z. Suárez y otros tres autores. *Estudio del comportamiento e impacto de la climatología sobre el cultivo de la papa y del pasto en la región central de Boyacá empleando los sistemas dinámicos*. *Ciencia en Desarrollo*, 6(2), 215-224 (2015).
- Simard, R. y P. L'Ecuyer, *Computing the Two-Sided Kolmogorov-Smirnov Distribution*, 1548-7660, *Journal of Statistical Software*, 39(11), 1-18 (2011).
- Weiss, L. L., *Ratio of true fixed-interval maximum rainfall*. *Journal of Hydraulics Division*, 90(1), 77-82 (1964).