Aplicaciones del elemento de viga de Timoshenko corrotacional en el análisis no lineal de vigas, pórticos y arcos 2D

*The using a co-rotating Timoshenko beam element in nonlinear
analysis of beams, plane frames and 2D arches*

William Taylor Matias Silva¹ María Paz Duque Gutiérrez^{1*} Gabriel Costa de Oliveira¹

Recibido 26 de junio de 2018, Received: June 26, 2018

Aceptado 29 de octubre de 2018 Accepted: October 29, 2018

RESUMEN

La cinemática corrotacional se basa en la separación del movimiento de un sólido en dos partes: el movimiento de cuerpo rígido y la deformación pura del sólido. La medida de la deformación es representada por tres modos naturales generados por el esfuerzo axial, la flexión pura y la flexión simple. Los esfuerzos generados por los modos naturales de deformación son auto-equilibrados, lo que permite obtener la matriz de rigidez tangente corrotacional consistente. En este trabajo se describe la formulación corrotacional de un elemento de viga de Timoshenko que no presenta bloqueo por deformación a cortante, se describe de forma detallada la obtención de las matrices de rigidez elástica, geométrica y corrotacional y se aplica el elemento de viga unificado en el análisis no lineal de vigas, pórticos y arcos 2D.

Palabras clave: Elemento de viga de Timoshenko, formulación corrotacional, modos naturales de deformación.

ABSTRACT

The present work describes a co-rotating shear flexible beam element without shear locking using Timoshenko's beam theories. The co-rotational kinematics is based on the separation of the motion in deformational and rigid body components. The deformation of the beam element is composed of three natural modes of deformation: the extension mode, the symmetric bending mode, and the anti-symmetric bending mode. The respective generalized stresses from these natural modes are self-balanced, allowing the achievement of a consistent tangent stiffness matrix. In this paper, it is detailed and deduced all the algebraic steps for the deduction of the elastic stiffness matrix, the geometric stiffness matrix, and the co-rotation stiffness matrix. Some examples are presented, and the numerical results reveal that the beam element here presented can perform the nonlinear analysis of plane frames and 2D arches.

Keywords: Timoshenko beam element, corotational kinematic, deformation's natural modes.

¹ Universidade de Brasília. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Brasília, Brasil.
E-mail: taylor@unb.br; mpazduque@gmail.com; bielcostadeoliveira@gmail.com

* Autor de correspondencia: mpazduque@gmail.com

INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas la comunidad de mecánica computacional ha mostrado un creciente interés en la aplicación de la formulación corrotacional para el análisis no lineal de estructuras utilizadas en las industrias aeronáutica, aeroespacial y petrolera, por ejemplo, Rankin y Brogan [1] y Rankin y Nour-Omid [2]. La formulación corrotacional descompone el movimiento de un sólido en un movimiento de cuerpo rígido y un movimiento que resulta en deformación pura. Esta formulación es un caso particular de la cinemática Lagrangiana para modelar los efectos de la no linealidad geométrica en el análisis estructural usando el método de los elementos finitos.

En esta formulación se asume que las traslaciones y las rotaciones de cuerpo rígido pueden ser grandes, pero las deformaciones deben ser pequeñas. Por lo anterior es posible el uso de elementos finitos lineales en problemas que involucran la no linealidad geométrica, siendo ésta la principal ventaja de la formulación corrotacional.

A mediados de los años 90 la formulación fue extendida al análisis de modelos de fallos locales y a aplicaciones que consideran la dinámica no lineal. En el trabajo de Skallerud *et al.* [3] es utilizada la formulación corrotacional para analizar tuberías de gas submarinas expuestas a grandes cambios geométricos y a fallos locales. Yaw *et al.* [4] muestran aplicaciones de la formulación corrotacional y los métodos sin malla en el análisis de sólidos 2D incluyendo la no linealidad geométrica y física. Felippa y Haugen [5] describen una formulación corrotacional unificada para análisis estático no lineal de sólidos discretizados por medio de elementos de vigas, placas y láminas. Mostafa *et al.* [6] extienden la formulación para análisis estáticos utilizando elementos finitos de sólidos 2D, sólidos 3D y elementos de sólidos-lámina de bajo orden, con campos de deformaciones mejorados que sólo tienen grados de libertad de traslación. Otros autores han aplicado la formulación corrotacional para análisis dinámico no lineal de sistemas estructurales discretizados con elementos de vigas 2D y 3D, por ejemplo, Le [7-8].

En este trabajo se presenta la formulación corrotacional de un elemento de viga 2D cuya

parte correspondiente a la deformación del elemento es representada por la composición de los tres modos naturales de deformación, definidos por Argyris *et al.* [9-10]. El principio de los trabajos virtuales complementarios, Krenk [11] se utiliza para obtener la matriz de rigidez elástica que utiliza un elemento de Timoshenko y que no presenta bloqueo por cortante. Además, utilizando el proceso descrito en Matias *et al.* [12], se detalla el desarrollo algebraico para el cálculo de las matrices de rigidez corrotacional y geométrica y la expresión completa de la matriz de rigidez tangente. Finalmente, se aplica este elemento para el análisis no lineal de pórticos y arcos planos donde se comprueba la inexistencia de bloqueo por cortante.

DESCRIPCIÓN CORROTACIONAL

En la formulación corrotacional se utilizan tres configuraciones a partir de las cuales son medidos los desplazamientos y las deformaciones: (i) la configuración inicial o configuración no deformada, (ii) la configuración corrotada que se obtiene al aplicar un movimiento de cuerpo rígido a la configuración inicial, y (iii) la configuración final o deformada que supone una deformación pura respecto a la configuración corrotada. La Figura 1 muestra un sistema de coordenadas globales con base ortonormal. Para expresar las variables cinemáticas en la configuración no deformada se utilizan las coordenadas materiales (X, Y) y en la configuración deformada las coordenadas espaciales (x, y) .

En la configuración no deformada las coordenadas nodales del elemento son (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) y su posición, longitud e inclinación inicial son

Figura 1. Movimiento del elemento de viga 2D.

$$\mathbf{X}^T = (X_1, Y_1, X_2, Y_2) \quad (1a)$$

$$l_0 = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2} \quad (1b)$$

$$\varphi_0 = 2 \arctan\left(\frac{l_0 - X_{21}}{Y_{21}}\right) \quad (1c)$$

donde $X_{21} = X_2 - X_1$ y $Y_{21} = Y_2 - Y_1$. Para obtener la expresión (1c) se utilizó la relación $\tan(1/2\phi_0)$. La ecuación (1c) es singular si $Y_{21} = 0$, por lo que se asigna el valor de $\phi_0 = 0$ para $X_{21} = l_0$ o $\phi_0 = \pi$ para $X_{21} = -l_0$. Esto ocurre cuando el eje local x_e del elemento es paralelo al eje global (X, x) . De manera similar, en la configuración deformada las coordenadas nodales del elemento son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , y su posición, longitud e inclinación actual son:

$$\mathbf{x}^T = (x_1, y_1, x_2, y_2) \quad (2a)$$

$$l = \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2} \quad (2b)$$

$$\varphi = 2 \arctan\left(\frac{l - x_{21}}{y_{21}}\right) \quad (2c)$$

donde $x_{21} = x_2 - x_1$ y $y_{21} = y_2 - y_1$. Para obtener la expresión (2c) se utilizó nuevamente la relación $\tan(1/2\phi)$. La ecuación (2c) es singular si $y_{21} = 0$, donde $\phi = 0$ para $x_{21} = l$ o $\phi = \pi$ para $x_{21} = -l$ cuando $x_e \parallel (X, x)$. Como se muestra en la Figura 1, el movimiento del elemento de viga 2D se da por el vector de desplazamientos nodales en coordenadas globales como indica la expresión (3):

$$\mathbf{u}^T = (u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2) \quad (3)$$

Por otro lado, las coordenadas nodales espaciales pueden ser escritas en función de los desplazamientos nodales como $x_1 = X_1 + u_1$ y $x_2 = X_2 + u_2$. A partir de estas expresiones se obtiene que $x_{21} = X_{21} + u_{21}$ y $Y_{21} = Y_{21} + v_{21}$, donde $u_{21} = u_2 - u_1$ y $v_{21} = v_2 - v_1$, lo que permite reescribir la longitud del elemento en la configuración deformada:

$$l = \sqrt{(X_{21} + u_{21})^2 + (Y_{21} + v_{21})^2} \quad (4)$$

El movimiento de cuerpo rígido es definido por dos traslaciones y una rotación del sistema de referencia local entre las configuraciones deformada y no deformada, para esto se fija en su centroide

un sistema de coordenadas locales (x_e, y_e) que se mantiene durante todo el movimiento, como se muestra en la Figura 1. El movimiento de cuerpo rígido es expresado como:

$$\mathbf{u}_r = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(u_2 + u_1) \\ \frac{1}{2}(v_2 + v_1) \\ \varphi - \varphi_0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Finalmente, la rotación de cuerpo rígido del elemento entre las configuraciones inicial y final es:

$$\varphi_r = \varphi - \varphi_0 \quad (6)$$

Rotaciones en los nodos del elemento debidas a las deformaciones

Según la Figura 2, las rotaciones en los nodos debidas a las deformaciones del elemento de viga 2D en la configuración final se expresan como:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 &= \theta_1 - \varphi_r = \theta_1 - (\varphi - \varphi_0) \\ \bar{\theta}_2 &= \theta_2 - \varphi_r = \theta_2 - (\varphi - \varphi_0) \end{aligned} \quad (7)$$

Donde θ_1 y θ_2 son las rotaciones totales (rotaciones debidas al movimiento de cuerpo rígido y a las deformaciones) de los nodos 1 y 2, respectivamente.

Modos naturales de deformación

Para definir el movimiento de cuerpo rígido del elemento de viga 2D son necesarios tres grados de libertad, por lo que los tres grados de libertad restantes son necesarios para definir la deformación

Figura 2. Rotaciones en los nodos del elemento debidas a la deformaciones.

del elemento. En este trabajo se adopta el concepto de los modos naturales de deformación definido por Argyris *et al.* [9-10].

Para el elemento de viga 2D se definen tres modos naturales de deformación, como se muestra en la Figura 3. El primer modo se obtiene al aplicar un esfuerzo axial de tracción en los nodos del elemento, el segundo modo al considerar el elemento sujeto a un estado de flexión pura, lo que implica la ausencia de esfuerzo cortante. Este modo define una línea elástica simétrica. En el tercer modo, el elemento está sujeto a un estado de flexión simple que resulta en esfuerzo cortante constante. Este modo define una línea elástica antisimétrica. De esta forma, el vector de deformaciones con relación al sistema de coordenadas locales puede ser expresado como

$$\mathbf{u}_d^T = (u, \theta_s, \theta_a) \quad (8)$$

donde

$$u = l - l_0 \quad (9a)$$

$$\theta_s = \theta_2 - \theta_1 \quad (9b)$$

$$\theta_a = \theta_2 + \theta_1 + 2(\varphi - \varphi_0) \quad (9c)$$

Para obtener las expresiones (9b) y (9c) (conforme a las Figuras 3b y 3c se suman las rotaciones simétricas y antisimétricas de cada nodo del elemento y se igualan a las rotaciones de los nodos debidas a las deformaciones del elemento descritas en la Figura 2 y definidas por las ecuaciones (7). Con este procedimiento se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\theta_s + \frac{1}{2}\theta_a &= \theta_1 - (\varphi - \varphi_0) \\ \frac{1}{2}\theta_s + \frac{1}{2}\theta_a &= \theta_2 - (\varphi - \varphi_0) \end{aligned} \quad (10)$$

Con la solución de las ecuaciones (10) se hallan los valores de θ_s y θ_a , expresados en las ecuaciones (9b) y (9c) respectivamente. Con el objeto de asumir cualquier magnitud en el valor de los ángulos, la expresión para rotación antisimétrica debe ser calculada usando la función módulo, Krenk [13], tal que

$$\theta_a = \text{mod}_{2\pi}(\theta_a + \pi) - \pi \quad (11)$$

La función módulo asigna un valor arbitrario del ángulo θ_a en el intervalo $[0, 2\pi)$, y el último término

Figura 3. Modos naturales de deformación. a) estiramiento. b) elástica simétrica. c) elástica antisimétrica.

restablece la simetría con relación al valor cero. La omisión de este paso puede llevar a problemas de divergencia cuando el elemento de viga 2D sufre rotaciones $\pm \pi, \pm 2\pi, \dots$

En la Figura 4 se muestra la aplicación de la función módulo dada en la ecuación (11) para ángulos que varían, por ejemplo, entre $\theta = 0$ y $\theta = 20\pi$, que corresponde a 10 vueltas en un círculo de radio unitario. Los valores obtenidos están dentro del intervalo $-\pi < \theta^* < \pi$ por la simetría con relación al valor cero.

Vector de esfuerzos internos

Es importante resaltar que los modos naturales de deformación generan esfuerzos seccionales auto-equilibrados como se muestra en la Figura 5. Los modos naturales de deformación, así como sus respectivos esfuerzos se expresan con relación al sistema de referencia local. Por tanto, el vector de esfuerzos auto equilibrados es dado por

$$\mathbf{f}_d^T = (N, M_s, M_a) \quad (12)$$

La combinación de los esfuerzos seccionales auto equilibrados mostrados en la Figura 5, genera un vector de fuerzas nodales auto equilibradas, como se

Figura 4. Función módulo para ángulos arbitrarios.

Figura 5. Esfuerzos auto equilibrados. a) Esfuerzo axial de tracción. b) Flexión pura. c) Flexión simple.

muestra en la Figura 6c. La relación de este vector con el vector de fuerzas nodales en coordenadas locales, mostrado en la Figura 6b, es dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{S}\mathbf{f}_d \quad (13)$$

donde $\mathbf{S}$ es la matriz de transformación

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/l \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/l \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Análogamente, la relación entre el vector de fuerzas nodales en coordenadas locales y el vector de fuerzas nodales en coordenadas globales, mostrado en la Figura 6a, es:

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{f}^e \quad (15)$$

donde $\mathbf{R}$ es la matriz de rotación del sistema de coordenadas locales para el sistema de coordenadas globales definida como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Finalmente, substituyendo la ecuación (13) en la ecuación (15), se obtiene la relación entre el vector de fuerzas auto-equilibradas y el vector de fuerzas internas en coordenadas globales descrito por:

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{f}_d \quad (17)$$

Figura 6. Vector de fuerzas nodales en a) coordenadas globales, b) coordenadas locales y c) Auto equilibrados.

Nótese que los desplazamientos nodales pueden ser escritos en el sistema de coordenadas locales

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{R}^T \mathbf{u} \quad (18)$$

OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

De acuerdo con la cinemática corrotacional es necesario deducir la expresión de la matriz de rigidez tangente con relación al sistema de referencia local fijo en el elemento. La matriz de rigidez tangente expresa la relación entre los incrementos de fuerzas y de desplazamientos nodales en coordenadas locales

$$d\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e d\mathbf{u}^e \quad (19)$$

Con las ecuaciones (15) y (18) se obtiene la matriz de rigidez tangente expresada en el sistema de coordenadas globales con la ecuación (20).

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{K}^e\mathbf{R}^T \quad (20)$$

Si se considera el elemento de viga 2D en su configuración deformada, como se muestra en la Figura 7, y se aplica un incremento infinitesimal de desplazamientos a partir de esta configuración de equilibrio, la variación de la rotación de cuerpo rígido y de la longitud del elemento puede ser descrita por

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{dv_2^e - dv_1^e}{l}, \\ dl &= du_2^e - du_1^e \end{aligned} \quad (21)$$

Figura 7. Movimiento incremental del elemento de viga 2D.

donde du_1^e , dv_1^e , du_2^e y dv_2^e son las componentes del incremento de desplazamientos nodales en el sistema de coordenadas locales. Considerando que el trabajo interno no varía en los diferentes sistemas de coordenadas y utilizando la ecuación (13), la variación del trabajo interno puede ser expresada como

$$dV = d\mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}^e = d\mathbf{u}^{eT} \mathbf{S} \mathbf{f}_d = d\mathbf{u}_d^T \mathbf{f}_d \quad (22)$$

Donde $d\mathbf{u}_d^T = (du, d\theta_s, d\theta_a)$ es la variación de los modos naturales de deformación. La última igualdad de la ecuación (22) se cumple para cualquier valor arbitrario de $\mathbf{f}_d$, obteniéndose que

$$d\mathbf{u}_d = \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e \quad (23)$$

La variación del vector de fuerzas internas dada por la ecuación (17) es descrita por

$$d\mathbf{f} = \mathbf{R} \mathbf{S} d\mathbf{f}_d + \mathbf{R} d\mathbf{S} \mathbf{f}_d + d\mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{f}_d \quad (24)$$

con

$$d\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} d\varphi \quad (25a)$$

$$d\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/l^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/l^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dl \quad (25b)$$

La relación entre las variaciones de los esfuerzos seccionales auto-equilibrados y los modos naturales de deformación es

$$d\mathbf{f}_d = \mathbf{K}_d d\mathbf{u}_d \quad (26)$$

Donde $\mathbf{K}_d$ es la matriz de rigidez elástica del elemento que tiene dimensión 3x3. Con las ecuaciones (15), (23) y (26), la ecuación (24) puede ser reescrita como

$$d\mathbf{f}^e = \mathbf{S} \mathbf{K}_d \mathbf{S}^T d\mathbf{u}^e + \left(d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T d\mathbf{R} \mathbf{S} \right) \mathbf{f}_d \quad (27)$$

Finalmente, usando la ecuación (19), la matriz de rigidez tangente en el sistema de coordenadas locales es:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{S}\mathbf{K}_d\mathbf{S}^T + \mathbf{K}_r \quad (28)$$

donde el primer término tiene en cuenta los coeficientes de rigidez de los modos naturales de deformación y $\mathbf{K}_r$ es la matriz de rigidez corrotacional que representa el efecto de la variación de la rotación de cuerpo rígido del sistema de referencia local y el efecto del esfuerzo cortante debido a la variación en la longitud del elemento, que de acuerdo con la ecuación (27), se define como: $\mathbf{K}_r = (d\mathbf{S} + \mathbf{R}^T d\mathbf{R}\mathbf{S})$. Cabe destacar que de acuerdo con la ecuación (25), la variación de la matriz de transformación $\mathbf{S}$ depende de la variable dl y la variación de la matriz de rotación $\mathbf{R}$ depende de $d\phi$. Con las ecuaciones (21a) y (21b) y después de algunos desarrollos algebraicos se llega a que:

$$\mathbf{K}_r = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 & 0 & -Q & 0 \\ Q & N & 0 & -Q & -N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 & 0 & Q & 0 \\ -Q & -N & 0 & Q & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Esta matriz forma parte de la matriz de rigidez geométrica completa del elemento de viga 2D como se demostrará en el apartado 3,3.

Matriz de rigidez elástica

El primer modo de deformación natural es la elongación del elemento de viga 2D y su coeficiente de rigidez, de acuerdo con la teoría de la resistencia de materiales, se obtiene con incremental $dN = EA/du$. Para el elemento en flexión pura el coeficiente de rigidez se obtiene con el Principio de Trabajos Virtuales Complementar (PTVC) que resulta en la relación incremental $dM_s = EA/l \, d\theta_s$. Al aplicarse el PTVC, se obtiene:

$$M_a \theta_a = \int_0^l \left(\frac{M(x)^2}{EI} + \frac{Q^2}{GA_0} \right) dx = \frac{1}{3} \frac{M_a^2 l}{EI} + \frac{Q^2 l}{GA_0} \quad (30)$$

donde A_0 es el área de la sección transversal corregida por un factor de forma que considera el efecto de la

distribución de las tensiones cortantes en la sección transversal. El efecto de la deformación por cortante se introduce con los parámetros:

$$\psi_a = \frac{1}{1 + \Phi}, \quad \Phi = \frac{12EI}{GA_0 l^2} \quad (31)$$

Con la expresión del esfuerzo cortante $Q = 2M_a/l$ y la ecuación (30), se determina la relación incremental:

$$dM_a = 3\psi_a \frac{EI}{l} d\theta_a \quad (32)$$

Finalmente, se define la matriz de rigidez elástica como:

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 3\psi_a \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Matriz de rigidez geométrica

Además de la matriz de rigidez elástica es necesario calcular la matriz de rigidez geométrica por el efecto del esfuerzo axial cuando el elemento de viga 2D sufre un incremento de rotación de cuerpo rígido. Los coeficientes de la matriz de rigidez geométrica se calcularon con la ecuación diferencial de la viga-columna sin cargas transversales y despreciando el efecto a cortante. El elemento de viga se considera simplemente apoyado para que se cumplan las condiciones de contorno del segundo y tercer modo de deformación natural (Figuras 3b y 3c). Consecuentemente, la ecuación diferencial puede ser expresada como:

$$EIv''' - Nv'' = 0 \quad (34)$$

Después de aplicar el método de integración por partes dos veces, se obtiene que la integral de la ecuación (34) es:

$$\int_0^l (\delta v'' EI v'' + \delta v' N v') dx = [\delta v' Q + \delta \theta M]_0^l \quad (35)$$

La relación incremental de la ecuación (35), después de algunos procedimientos algebraicos, puede ser expresada como:

$$\int_0^l (\delta v'' E I dv'' + \delta v N dv') dx = [\delta v dQ + \delta \theta dM]_0^l \quad (36)$$

El coeficiente de rigidez geométrico debido al segundo modo de deformación natural es calculado con el segundo término de la ecuación (36)

$$\int_0^l \delta v' N dv' dx = [\delta \theta_s dM_s]_0^l \quad (37)$$

El campo de desplazamiento incremental dv y el campo de desplazamiento virtual δv y sus derivadas de primer orden se interpolan utilizando la función de forma para la elástica simétrica definida en la Figura 8. Al aplicar la regla de la cadena se obtiene que $dv' = 1/2 \xi d\theta_s$ y $\delta v' = 1/2 \xi \delta \theta_s$. Luego, al integrar la ecuación (37) en el eje ξ se obtiene que:

$$dM_a = \frac{1}{12} N l d\theta_a \Rightarrow k_a = \frac{1}{12} N l \quad (38)$$

El coeficiente de rigidez geométrico debido al tercer modo de deformación natural se calcula con el primer término de la ecuación (36). Siguiendo los pasos anteriores aplicando la regla de la cadena se obtiene que $dv' = -1/4 (1-3\xi^2) d\theta_a$ y $\delta v' = -1/4 (1-3\xi^2) \delta \theta_a$.

$$\int_0^l \delta v' N dv' dx = [\delta \theta_a dM_a]_0^l \quad (39)$$

Integrando la ecuación anterior en el eje ξ se llega a que:

Elástica simétrica

$$v = -\frac{l}{8} (1 - \xi^2) \theta_s$$

$x = \frac{l}{2} (1 + \xi) \quad -1 \leq \xi \leq 1$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{l}{2} \Rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l}$$

Elástica antisimétrica

$$v = -\frac{l}{8} (1 - \xi^2) \xi \theta_a$$

Regla de la cadena

$$\frac{d(\cdot)}{dx} = \frac{d(\cdot)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}$$

Figura 8. Funciones de forma.

$$dM_a = \frac{1}{20} N l d\theta_a \Rightarrow k_a = \frac{1}{20} N l \quad (40)$$

Finalmente, la matriz de rigidez geométrica es definida por:

$$K_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} N l & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} N l \end{bmatrix} \quad (41)$$

Matriz de rigidez tangente completa

La matriz de rigidez tangente completa del elemento de viga 2D se obtiene al extender las matrices K_d y K_g en sus formas completas. Lo anterior para matrices de orden 6x6, utilizando la matriz de transformación S . Luego, la forma completa de la matriz de rigidez del elemento es:

$$K_e = S K_d S^T + S K_g S^T + K_r = K_d^e + K_g^e \quad (42)$$

donde

$$K_d^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\psi_a \frac{EI}{l^3} & 6\psi_a \frac{EI}{l^2} & 0 & -12\psi_a \frac{EI}{l^3} & 6\psi_a \frac{EI}{l^2} \\ 0 & 6\psi_a \frac{EI}{l^2} & (3\psi_a + 1) \frac{EI}{l} & 0 & -6\psi_a \frac{EI}{l^2} & (3\psi_a + 1) \frac{EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\psi_a \frac{EI}{l^3} & 6\psi_a \frac{EI}{l^2} & 0 & 12\psi_a \frac{EI}{l^3} & -6\psi_a \frac{EI}{l^2} \\ 0 & 6\psi_a \frac{EI}{l^2} & (3\psi_a - 1) \frac{EI}{l} & 0 & -6\psi_a \frac{EI}{l^2} & (3\psi_a + 1) \frac{EI}{l} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$K_g^e = S K_g S^T + K_r = \begin{bmatrix} 0 & Q & 0 & 0 & -Q & 0 \\ Q & \frac{6}{5} N & \frac{1}{10} N l & -Q & -\frac{6}{5} N & \frac{1}{10} N l \\ 0 & \frac{1}{10} N l & \frac{2}{15} N l^2 & 0 & -\frac{1}{10} N l & -\frac{1}{30} N l^2 \\ 0 & -Q & 0 & 0 & Q & 0 \\ -Q & -\frac{6}{5} N & -\frac{1}{10} N l & Q & \frac{6}{5} N & -\frac{1}{10} N l \\ 0 & \frac{1}{10} N l & -\frac{1}{30} N l^2 & 0 & -\frac{1}{10} N l & \frac{2}{15} N l^2 \end{bmatrix}$$

K^e es la matriz de rigidez tangente, K_d^e la matriz de rigidez material y K_g^e la matriz de rigidez geométrica del elemento de viga 2D. Turner *et al.* (14) fueron los primeros autores en obtener la matriz de rigidez material para un elemento de viga de Timoshenko sin bloqueo por cortante, y Przemieniecki (15) describe la matriz de rigidez material en función del coeficiente ϕ (ecuación (31)) a través de la solución de una ecuación diferencial ordinaria con las hipótesis

de Timoshenko. Por otro lado, asumiendo $Q = 0$ en la matriz de rigidez geométrica en (43b), se obtiene que la matriz de rigidez geométrica estándar del elemento de viga de Timoshenko está definida por

$$K_g^e = \frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & -36 & 3l \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 36 & -3l \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Martin [16] fue el primero en publicar la expresión de esta matriz.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para hacer el análisis no lineal geométrico de los ejemplos numéricos presentados a continuación, se utilizó un algoritmo escrito en el lenguaje Fortran90. La Tabla 1 resume los principales pasos a ser implementados en un programa computacional para el cálculo del vector de fuerzas internas de la matriz de rigidez tangente del elemento de viga 2D, expresados en coordenadas globales. Se adoptó una

Tabla 1. Algoritmo de la descripción corrotacional.

Desplazamientos en coordenadas globales	
$\mathbf{u}^T = (u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2)$	(3)
Configuración deformada	
$\mathbf{x}^T = \mathbf{X}^T + \mathbf{u}^T = (X_1 + u_1, Y_1 + v_1, \theta_1, u_2 + X_2, v_2 + Y_2, \theta_2)$	
Rotación de cuerpo rígido $\varphi - \varphi_0$	
$\varphi_0 = 2 \arctan\left(\frac{l_0 - X_{21}}{Y_{21}}\right), \varphi = 2 \arctan\left(\frac{l - x_{21}}{y_{21}}\right)$	(1c), (2c)
Modos naturales de deformación	
$\mathbf{u}_d = \left\{ \begin{matrix} u \\ \theta_s \\ \theta_a \end{matrix} \right\}, \quad \left \begin{matrix} u = l - l_0 \\ \theta_s = \theta_2 - \theta_1 \\ \theta_a = \theta_2 + \theta_1 + 2(\varphi - \varphi_0) \end{matrix} \right.$	(9)
Función módulo para ángulos arbitrarios	
$\theta_a = \frac{\text{mod}}{2\pi} (\theta_a + \pi) - \pi$	(11)
Esfuerzos auto equilibrados	
$\mathbf{f}_d = \mathbf{K}_d \mathbf{u}_d$	(12), (33)
Esfuerzos en coordenadas globales	
$\mathbf{f} = \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{f}_d$	(14), (16), (17)
Matriz de rigidez tangente en coordenadas globales	
$\mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{K}^e \mathbf{R}^T$	[16], [20], [42]

tolerancia para convergencia de 10^{-5} . El objetivo de estos ejemplos es mostrar el desempeño del elemento de viga unificado para reproducir el comportamiento altamente no lineal de algunos sistemas estructurales. Es importante destacar, como será visto en los siguientes ejemplos, que la relación entre la altura de la sección transversal del elemento de viga utilizado y la longitud del elemento es mucho menor que uno ($h/l \ll 1$), esto es justamente para mostrar que el elemento descrito en este trabajo no presenta bloqueo por cortante, además de mostrar la habilidad del elemento para tratar grandes rotaciones de cuerpo rígido. Finalmente, los resultados numéricos obtenidos con el elemento de viga Timoshenko fueron iguales a los resultados obtenidos por otros autores que utilizaron el elemento de viga Euler-Bernoulli, por lo que se puede concluir que el elemento no sufre bloqueo por cortante.

Viga en voladizo sometida a flexión pura

Este ejemplo ilustra la habilidad de la formulación corrotacional para analizar grandes rotaciones de cuerpo rígido aplicando la función módulo definida en la ecuación (11). Se evalúa el comportamiento de una viga empotrada sujeta a un momento flector en su extremo libre que se va enrollando en círculos con radios cada vez más pequeños a medida que el valor del momento flector aplicado aumenta.

El primer círculo se forma cuando $l = 2\pi r$, es decir, cuando se completa una vuelta. Así, el radio de curvatura es $r = l/2\pi$, la curvatura $\kappa = 2\pi/l$ y el momento flector $M = 2\pi EI/l$. La viga se discretizó en 10, 20 y 40 elementos de viga 2D y las propiedades mecánicas y geométricas consideradas se detallan en la Tabla 2. Se usaron mallas más refinadas para representar de forma precisa los círculos de radios menores y se impuso una rotación de $2\pi/10$ en el extremo libre de la viga, siendo necesarios 10 pasos de carga para completar una vuelta.

Se simularon 8 vueltas con 80 pasos de carga, la configuración final de la viga es un círculo de radio $1000/16\pi = 19,89$. Es importante destacar que después de 8 vueltas, el extremo libre de la viga sufre una rotación de cuerpo rígido en el valor de 2880° . La deformación de la viga mostrada en la Figura 9b es obtenida con 40 elementos, donde la viga completa 5 vueltas, formando 5 círculos. No es posible representar con precisión 8 círculos

con la malla de 40 elementos porque la longitud de cada elemento es $1000/40 = 25 > 19,89$, por lo que es necesaria una discretización con más de 50 elementos. En la Figura 9c se muestran los desplazamientos horizontal y vertical de la extremidad libre de la viga para 8 vueltas con las diferentes mallas utilizadas. A medida que se refina la malla, la representación de la magnitud de estos desplazamientos con el aumento de las vueltas es mejor. Para la discretización con 10 elementos la trayectoria de equilibrio se obtuvo con un número medio de iteraciones de 5,68 con 20 elementos con 5,04 y con 40 elementos con 6.

Arco circular de gran altura apoyado-empotrado

En este ejemplo se evaluó un arco de directriz circular con gran altura, una extremidad empotrada y la otra apoyada con un vínculo de segundo género.

Tabla 2. Propiedades geométricas y mecánicas.

$E = 1000$	$G = 380$
$I = 1$	$A = 1$
$l = 1000$	$b = \sqrt{3}/6$
$h = 2\sqrt{3}$	$f = 5/6$

Figura 9. Viga en voladizo sometida a flexión pura: a) configuración inicial y deformada, b) trayectorias de equilibrio.

El arco está sometido a una carga concentrada P en el vértice, como se muestra en la Figura 10a, las propiedades mecánicas y geométricas consideradas se detallan en la Tabla 3. El arco se discretizó en 20 elementos de viga 2D. En la Figura 10b se muestran las trayectorias de equilibrio que describen la evolución de los desplazamientos horizontal u y vertical v del vértice del arco.

Para obtener las trayectorias de equilibrio se utilizó el método de longitud de arco con restricción de las iteraciones en trayectoria ortogonal. Se adoptó una longitud de arco de 12 para 100 pasos de carga y 436 iteraciones en total. El número medio de iteraciones por paso de carga fue de 4,36. La Figura 10b muestra que las trayectorias de equilibrio tienen puntos límites y puntos de inflexión. Los resultados de la trayectoria de equilibrio $P \times v$ concuerdan con los obtenidos por Wagner [17].

Arco circular de gran altura empotrado

En este ejemplo se analizó un arco con directriz circular de gran altura y ambos extremos empotrados, sometido a una carga concentrada P en su vértice. El arco se discretizó en 20 elementos de viga 2D y en la Figura 11a se observa la configuración inicial. En la Figura 11b se muestra la curva de carga P versus el desplazamiento vertical v del vértice. Las propiedades mecánicas y geométricas consideradas se detallan en la Tabla 3. Para encontrar las trayectorias de equilibrio se utilizó el método de longitud de arco con restricción cilíndrica. La longitud de arco fue de 12 para 56 pasos de carga y 224 iteraciones en total y el número medio de iteraciones por paso de carga de 4. De acuerdo con la Figura 11b, la trayectoria de equilibrio del arco tiene dos puntos límites. Los resultados de la trayectoria de equilibrio se compararon con los obtenidos por Wriggers y Simo [18], obteniendo una buena concordancia.

Pórtico de Lee

Este ejemplo consiste en la unión de una viga y una columna formando un ángulo recto entre sí,

Tabla 3. Propiedades geométricas y mecánicas.

$E = 10000$	$G = 3846$
$\nu = 0,3$	$A = 1$
$I = 1$	$\alpha = 215^\circ$
$b = \sqrt{3}/6$	$h = 2\sqrt{3}$
$f = 5/6$	$R = 100$

Figura 10. Arco circular apoyado y empotrado: a) configuración inicial, b) desplazamientos horizontal y vertical del vértice.

Figura 11. Arco circular empotrado: a) configuración inicial, b) desplazamientos vertical del vértice.

es decir, un pórtico plano con nodo rígido. Ambas extremidades están apoyadas a través de un vínculo de segundo género. Las condiciones de carga y la configuración inicial son descritas en la Figura 12a. Este pórtico se discretizó en 20 elementos de viga 2D. En la Figura 12b se muestran las trayectorias

Figura 12. Pórtico de Lee: a) configuración inicial, b) trayectorias de equilibrio.

de equilibrio que describen la evolución de los desplazamientos horizontal u y vertical v del nodo bajo la carga P . Las propiedades mecánicas y geométricas consideradas se detallan en la Tabla 4. Para obtener la respuesta no lineal del pórtico de Lee se utilizó el método de longitud de arco con restricción cilíndrica. La longitud de arco fue de 10,5 para 62 pasos de carga y 275 iteraciones totales y el número medio de iteraciones por paso de carga fue 4,43. Es posible notar que las trayectorias de equilibrio del Pórtico Lee mostradas en la Figura 12b son altamente no lineales y tienen algunos puntos límites y puntos de inflexión. Los resultados de ambas trayectorias de equilibrio se compararon con los obtenidos por Battini [19] y se observó una buena concordancia.

Tabla 4. Propiedades geométricas y mecánicas.

$E = 720$	$A = 6$
$\nu = 0.3$	$I = 2$
$f = 5/6$	

CONCLUSIONES

Este trabajo implementa un elemento de Timoshenko que no presenta bloqueo por deformación de cortante, por lo que no produce una rigidez artificial, mayor a la real, en el comportamiento no lineal de los diferentes tipos de estructuras. Por otra parte, se describió en detalle la relación entre la formulación corrotacional y los modos de deformaciones naturales. La principal ventaja del uso de los modos naturales de deformación es que definen a priori los esfuerzos internos auto equilibrados, permitiendo obtener el vector de fuerzas nodales y la matriz de rigidez tangente consistente en coordenadas globales, por medio de operaciones algebraicas muy simples.

Se describió de forma explícita el movimiento de cuerpo rígido del elemento de viga 2D y la obtención de la matriz de rigidez corrotacional. Una de las principales ventajas de la formulación corrotacional es el desacoplamiento entre los efectos locales y globales, que permite utilizar una biblioteca de elementos finitos provenientes del análisis lineal. La extensión de estos elementos finitos al análisis no lineal geométrico es posible cuando se consideran los efectos globales debidos al movimiento de cuerpo rígido. Diferentes no linealidades físicas pueden ser fácilmente incorporadas a la formulación corrotacional, ya que son efectos locales.

Finalmente, se verificó a través de ejemplos numéricos, el buen desempeño del elemento finito de viga 2D en el análisis no lineal de vigas, pórticos planos y arcos.

REFERENCIAS

- [1] C.C. Rankin and F.A. Brogan. "An element independent corrotational procedure for the treatment of large rotation". ASME J. Pressure Vessel Technology. Vol. 108 N° 2, pp. 165-174. DOI: 10.1115/1.3264765. 1986.
- [2] C.C. Rankin and B. Nour-Omid. "The use of projectors to improve finite element performance". Computers and Structures. Vol. 30, Issue 1, pp. 257-267. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(88\)90231-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90231-3). 1988.
- [3] B. Skallerud, K. Holthe and B. Haugen. "Thin shell and surface crack elements for simulation of combined failure modes". Computers Methods in Applied Mechanics

- and Engineering, Vol. 194, Issue 21, pp. 2619-2640. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.07.049>. 2006.
- [4] L. Yaw, N. Sukumar and S. K. Kunnath S. K. "Meshfree co-rotational formulation for two-dimensional continua". International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 79, Issue 8, pp. 979-1003. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/nme.2606>. 2009.
- [5] C.A. Felippa and B. Haugen. "A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory". Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 194 N° 21, pp. 2285-2335. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.07.035>. 2005.
- [6] M. Mostafa, M.V. Sivaselvan and C.A. Felippa. "A solid-shell corotational element based on ANDES, ANS and EAS for geometrically nonlinear structural analysis". International journal for numerical methods in engineering. Vol. 95, Issue 2, pp. 145-180. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/nme.4504>. 2013.
- [7] T.N. Le, J.M. Battini and M. Hjiaj. "Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams". Computational Mechanics. Vol. 48, Issue 2, pp. 153-161. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-011-0585-6>. 2011.
- [8] T.N. Le, J.M. Battini and M. Hjiaj. "A consistent 3D corotational beam for nonlinear dynamic analysis of flexible structures". Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 269, pp. 538-565. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2013.11.007>. 2014.
- [9] J. Argyris, H. Balmer, J. St. Doltsinis, *et al.* "Finite element method - the natural approach". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 17, pp. 1-106, DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(79\)90083-5](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(79)90083-5). 1979.
- [10] J. Argyris, H. O. Hilpert, G.A. Malejannakis and D.W. Scharpf. "On the geometrical stiffness of a beam in space - A consistent V.W. approach". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 20, Issue 1, pp. 105-131. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(79\)90061-6](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(79)90061-6). 1979.
- [11] S. Krenk. "Mechanics and analysis of beams, columns and cables". Berlin: Springer. 2000.
- [12] W.T. Matias Silva, A.A. Cunha and M.P. Duque Gutiérrez. "Análisis no lineal de pórticos planos usando la formulación corrotacional con elemento de viga Timoshenko". Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 33, Issue 1, pp. 115-122. DOI: [10.1016/j.rimni.2016.03.001](https://doi.org/10.1016/j.rimni.2016.03.001). 2017.
- [13] S. Krenk. "Non-linear modeling and analysis of solids and structures". Cambridge: Cambridge University Press. 2009.
- [14] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin and L.J. Topp. "Stiffness and deflection analysis of complex structures". Journal of the Aeronautical Sciences. Vol. 23, Issue 9, pp. 805-824. DOI: <https://doi.org/10.2514/8.3664>. 1956.
- [15] J.S. Przemieniecki. "Theory of matrix structural analysis". New York: McGraw-Hill. 1968.
- [16] H.C. Martin. "On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems". Air Force Institute of Technology, AFFDL-TR-66-80: 697-716. 1966.
- [17] W. Wagner. "A path-following algorithm with quadratic predictor". Computers and Structures. Vol. 39, Issue 3, pp. 339-348. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(91\)90031-G](https://doi.org/10.1016/0045-7949(91)90031-G). 1991.
- [18] P. Wriggers and J.C. Simo. "A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points". International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 30, Issue 1, pp. 155-176. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1620300110>. 1990.
- [19] J.M. Battini. "Co-rotational beam elements in instability problems". Department of Mechanics, Royal Institute of Technology, Techn. Dr. Thesis. 2002.