Proyecciones
Vol. 23, N° 1, pp. 1-13, May 2004.
Universidad Católica del Norte
Antofagasta - Chile

LA FORMA NORMAL DE LIE EN UN CASO CRÍTICO DE UN SISTEMA HAMILTONIANO CON TRES GRADOS DE LIBERTAD Y TRES FRECUENCIAS IGUALES *

JOSÉ MANSILLA

Universidad de Magallanes, Chile

Received October 2002. Accepted November 2003.

Abstract

In this work, we consider a Hamiltonian system with three degrees of freedom, whose linear part has all its roots pure imaginary and its three frequencies equal. We determine the kernel of the Lie operator and the normal form, according to Meyer of Hamiltonian in the diagonalizable case and in one of the nondiagonalizable cases, obtaining a normal form of the type obtained by Sokol's kii and Mansilla in previous works.

AMS classification : *Primary 34C20, 34D20, 34K20; Secondary 34D10, 35B34.*

Keywords : *Sistema Hamiltoniano, resonancias, forma normal.*

*Parc. Fin. por Dir. de Investigación UMAG, Proyecto 267-2001.

1. Introducción

La determinación de una forma normal para el Hamiltoniano de un sistema Hamiltoniano, se torna fundamental, sobretodo cuando se quiere estudiar asuntos de estabilidad de soluciones de equilibrio. En este trabajo, y en otros anteriores ([3]), hemos abordado el caso de sistemas Hamiltonianos con tres grados de libertad en los casos críticos, es decir, en los casos en que el sistema linealizado tiene frecuencias iguales. Este tema, lo mismo que el estudio de la estabilidad de las soluciones de equilibrio en tales casos, es no trivial y su estudio ha ofrecido grandes dificultades.

Aquí estudiamos el caso en que el sistema linealizado, del sistema Hamiltoniano, tiene sus tres frecuencias iguales no nulas en los casos diagonalizable y no diagonalizable (uno de los casos) utilizando un método similar al utilizado en [3], presentamos y demostramos los Teoremas 2.1 y 3.1, que dice relación con el núcleo del operador de Lie (parte (I)), y la forma normal del Hamiltoniano respectivo (parte (II)), obteniéndose una forma normal del tipo Sokol'skii ([5]) en el caso del Teorema 3.1.

El planteamiento del problema es el siguiente. Consideremos un sistema Hamiltoniano

$$(1.1) \quad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

donde el Hamiltoniano H es dado por

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots + H_s + \dots$$

siendo H_s un polinomio homogéneo de grado $s + 2$ en $X = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$. Supongamos que la ecuación característica del sistema linealizado, determinado por la matriz hamiltoniana A , tiene raíces imaginarias puras del tipo $\pm ai$, $\pm ai$, $\pm ai$, con a un número real positivo. Supongamos, además, que la matriz correspondiente está en su forma canónica simpléctica. Entonces la parte cuadrática *normalizada*, H^0 , es dada por $H^0(X) = -\frac{1}{2}X^T(JA_3)X$. Por [4], existe un cambio formal simpléctico de coordenadas del tipo, $X = W(Y) = Y + \dots$ que transforma el Hamiltoniano

$$(1.2) \quad H(X) = H_0(X) + H_1(X) + \dots$$

en el Hamiltoniano

$$H^*(Y) = \sum_{s=0}^{\infty} H^s(Y)$$

donde H_s y H^s son polinomios homogéneos de grado $s + 2$ y tal que

$$(1.3) \quad H^s(\varphi^T(t, Y)) \equiv H^s(Y),$$

para todo $Y \in \mathbb{R}^6$ y todo número real t , donde $\varphi^T(t, Y)$ es el flujo del sistema lineal adjunto determinado por A^T , es decir,

$$A^T = JR, \quad H_0^T(X) = \frac{1}{2}X^T R X, \text{ con } J = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la condición (1.3) es equivalente a

$$(1.4) \quad L_{A^T}(H^s) = \{H_0^T, H^s\} = 0, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

donde $\{.,.\}$ es el corchete de Poisson ([4]). Este último, L_{A^T} , es llamado **operador de Lie** y, entonces, cada polinomio homogéneo del Hamiltoniano normalizado se encuentra en su núcleo.

2. El caso diagonalizable

Si matriz es diagonalizable, entonces la matriz Hamiltoniana canónica es dada por

$$(2.1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a\delta_2 a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 a \\ -\delta_1 a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2 a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_3 a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $\delta_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$. Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sea A una matriz hamiltoniana del tipo (2.1). Entonces, en las coordenadas*

$$\zeta_j = x_j + iy_j, \quad \eta_j = x_j - iy_j, \quad (j = 1, 2, 3),$$

donde $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ son coordenadas simplécticas que normalizan un Hamiltoniano con parte lineal determinada por A , se tiene,

$$\begin{aligned}
I) \quad Ker(L_{AT}^s) &= \left\{ K(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{\substack{|(k,l)|=s \\ (k,l) \in M_{(\delta_1, \delta_2, \delta_3)}}} h_{kl} \zeta^{k_1} \zeta^{k_2} \zeta^{k_3} \eta^{l_1} \eta^{l_2} \eta^{l_3}, \right. \\
&\quad \left. h_{kl} \in \mathbb{C}, \quad s > 2, \text{ donde} \right. \\
&\quad \left. M_{(\delta_1, \delta_2, \delta_3)} = \right. \\
&\quad \left. \{(k, l) = (k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 / \langle k - l, (\delta_1, \delta_2, \delta_3) \rangle = 0\}. \right.
\end{aligned}$$

II) La forma normal para el Hamiltoniano de un sistema Hamiltoniano con parte lineal determinada por A , en las coordenadas

$$\zeta_j = x_j + iy_j, \quad \eta_j = x_j - iy_j, \quad (j = 1, 2, 3),$$

tiene la forma

$$(2.2) \quad \dot{\zeta}_j = \frac{\partial H^*}{\partial \eta_j}, \quad \dot{\eta}_j = -\frac{\partial H^*}{\partial \zeta_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

donde

$$\begin{aligned}
H^* &= \frac{1}{2}iH^0 + \frac{1}{2}i \sum_{\substack{s=2n \\ n \geq 2}} \sum_{\substack{|(k,l)|=s \\ (k,l) \in M_{(\delta_1, \delta_2, \delta_3)}}} h_{kl} \zeta^{k_1} \zeta^{k_2} \zeta^{k_3} \eta^{l_1} \eta^{l_2} \eta^{l_3} \quad (h_{kl} \in \mathbb{C}), \\
(2.3)
\end{aligned}$$

con

$$H^0(x, y) = \frac{\delta_1}{2}a(x_1^2 + y_1^2) + \frac{\delta_2}{2}a(x_2^2 + y_2^2) + \frac{\delta_3}{2}a(x_3^2 + y_3^2)$$

Demostración : Considerando que A es la matriz hamiltoniana que determina la parte cuadrática de un Hamiltoniano, entonces en coordenadas simplécticas $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$, éste es dado por

$$H_0 = \frac{\delta_1}{2}a(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\delta_2}{2}a(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\delta_3}{2}a(q_3^2 + p_3^2).$$

La matriz transpuesta de A es dada por

$$R = A^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\delta_1 a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_2 a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_3 a \\ a\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a\delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\delta_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\delta_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$ y,

entonces, el Hamiltoniano cuadrático para el sistema adjunto es dado por

$$H_{AT}^0 = \frac{-\delta_1}{2}a(q_1^2 + p_1^2) + \frac{-\delta_2}{2}a(q_2^2 + p_2^2) + \frac{-\delta_3}{2}a(q_3^2 + p_3^2).$$

De esta forma, el operador de Lie L_{AT} , para un polinomio K es dado por

$$(2.4) \quad L_{AT}(K) = \delta_1 a \left(p_1 \frac{\partial K}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial K}{\partial p_1} \right) + \delta_2 a \left(p_2 \frac{\partial K}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial K}{\partial p_2} \right) + \delta_3 a \left(p_3 \frac{\partial K}{\partial q_3} - q_3 \frac{\partial K}{\partial p_3} \right).$$

Suponiendo que en las coordenadas x_j, y_j el Hamiltoniano está normalizado, hagamos el cambio de variable

$$(2.5) \quad \zeta_j = x_j + iy_j, \quad \eta_j = x_j - iy_j, \quad (j = 1, 2, 3).$$

Observemos que este cambio de variables es simpléctico de multiplicador $-2i$. Entonces, para un monomio de la forma $K = \zeta^{k_1} \zeta^{k_2} \zeta^{k_3} \eta^{l_1} \eta^{l_2} \eta^{l_3}$ ($k_j, l_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $j=1,2,3$) obtenemos que

$$(2.6) \quad L_{AT}(K) = ia[\delta_1(l_1 - k_1) + \delta_2(l_2 - k_2) + \delta_3(l_3 - k_3)]K.$$

Consideremos el subconjunto de $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3$ definido por

$$M_{(\delta_1, \delta_2, \delta_3)} = \{r = (k, l) = (k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 / \langle k - l, (\delta_1, \delta_2, \delta_3) \rangle = 0\},$$

entonces, un polinomio homogéneo de la forma

$K = \sum_{|(k,l)|=s} h_{kl} \zeta^{k_1} \zeta^{k_2} \zeta^{k_3} \eta^{l_1} \eta^{l_2} \eta^{l_3}$, con $s > 0$, $(k, l) = (k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ y $|(k, l)| = k_1 + k_2 + k_3 + l_1 + l_2 + l_3$, está en $\text{Ker}(L_{AT}^s)$ si y sólo si, todos los coeficientes no nulos h_{kl} de K son tales que $(k, l) \in M_{(\delta_1, \delta_2, \delta_3)}$, es decir,

$$\text{Ker}(L_{AT}^s) = \{K(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{\substack{|(k,l)|=s \\ (k,l) \in M_{(\delta_1, \delta_2, \delta_3)}}} h_{kl} \zeta^{k_1} \zeta^{k_2} \zeta^{k_3} \eta^{l_1} \eta^{l_2} \eta^{l_3}, \quad h_{kl} \in \mathbb{C}\}.$$

Por lo que hemos demostrado la parte (I) del Teorema.

Siguiendo, un Hamiltoniano con parte cuadrática determinada por A de la forma

$$(2.7) \quad H^*(x, y) = H^0 + H^1 + H^2 + \dots + H^s + \dots$$

donde H^s es un polinomio de homogéneo de grado $s + 2$ en

$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$, está normalizado (2.2) si para $s > 0$, $H^s \in \text{Ker}(L_{AT})$, por lo que en las variables dadas en (7) debe tenerse que

$$H^s(\zeta^k, \eta^l) = \sum_{\substack{|(k,l)|=s+2 \\ (k,l) \in M_{(\delta_1, \delta_2, \delta_3)}}} h_{kl} \zeta^{k_1} \zeta^{k_2} \zeta^{k_3} \eta^{l_1} \eta^{l_2} \eta^{l_3}$$

Supongamos que $H^s \neq 0$, entonces, para un término de sub-índice (k, l) se tiene las relaciones

$$(2.8) \quad \begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 + l_1 + l_2 + l_3 &= s + 2 \\ \delta_1 k_1 + \delta_2 k_2 + \delta_3 k_3 &= \delta_1 l_1 + \delta_2 l_2 + \delta_3 l_3 \end{aligned}$$

de donde obtenemos, independientemente de los δ 's que $s + 2$ debe ser un número par, es decir, s es un número par y, entonces, **los únicos términos H^s no nulos en el Hamiltoniano normalizado son los de grado par.** Rescribiendo H^* con estas consideraciones, tenemos demostrado la parte (II) del Teorema. ■

3. Un caso no diagonalizable

Estudiamos aquí, el caso en que la matriz del sistema linealizado es no diagonalizable y tiene la forma canónica simpléctica $([1], [2])$

$$(3.1) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_1 a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix},$$

con $\delta_i = \pm 1$, $i = 1, 2$. Entonces la parte cuadrática *normalizada*, H^0 , de un Hamiltoniano con parte lineal determinada por A , es dada por

$$\begin{aligned} H_0(X) &= -\frac{1}{2} X^T (J A_3) X \\ &= \frac{\delta_1 a}{2} (q_1^2 + p_1^2) + \frac{\delta_2}{2} (q_2^2 + q_3^2) + a (q_3 p_2 - q_2 p_3) \end{aligned}$$

donde $X = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$, son coordenadas simplécticas.

Considerando que las variables que llevan al Hamiltoniano (1.2) a su forma normal completa son $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sea A una matriz hamiltoniana del tipo (3.1). Entonces, en las coordenadas simplécticas $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, se tiene que,*

I) Para $s > 2$,

$$\text{Ker}(L_{AT}^s) \subseteq \mathbb{R}[\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4],$$

más específicamente, si $K^s \in \text{Ker}(L_{AT}^s)$ entonces K^s es un polinomio homogéneo de la forma

$$K^s = \sum_{|(n_1, n_2, n_3, n_4)|=s} h_n \Gamma_1^{n_1} \Gamma_2^{n_2} \Gamma_3^{n_3} \Gamma_4^{n_4} \quad (h_n \in \mathbb{R}),$$

donde

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2), \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2}(y_2^2 + y_3^2), \quad \Gamma_3 = x_3 y_2 - x_2 y_3, \quad \Gamma_4 = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2).$$

II) Consideremos un sistema Hamiltoniano del tipo (1.2) con las condiciones de la parte lineal anteriores. Entonces la forma normal, H^* , para el Hamiltoniano (1.2) expresado en las variables $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ tiene la forma,

$$H^*(x, y) = H^0 + H^1 + H^2 + \dots + H^s + \dots$$

donde H^s , $s \geq 1$, es un polinomio homogéneo de grado $2(s+1)$ en $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ y un polinomio homogéneo de grado $s+1$ en $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ y con $H^0 = \delta_1 a \Gamma_1 + a \Gamma_3 + \delta_2 \Gamma_4$.

Demostración.

I) Con las hipótesis anteriores, aquí

$$R = \begin{pmatrix} -\delta_1 a & 0 & 0 & \delta_1 a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_1 a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & -\delta_2 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & -\delta_2 \end{pmatrix}$$

y entonces tenemos que

$$(3.2) \quad H_0^T = \frac{-\delta_1 a}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{-\delta_2}{2}(y_2^2 + y_3^2) + a(x_2 y_3 - x_3 y_2).$$

Por lo tanto,

$$(\nabla H_0^T)^T = (-\delta_1 a x_1, a y_3, -a y_2, -\delta_1 a y_1, -\delta_2 y_2 - a x_3, -\delta_2 y_3 + a x_2)$$

luego, para un polinomio homogéneo de orden $s > 2$, K^s , tenemos

$$\begin{aligned} \{H_0^T, K^s\} = & -\delta_1 a \left(x_1 \frac{\partial K^s}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial K^s}{\partial x_1} \right) - a \left(x_2 \frac{\partial K^s}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial K^s}{\partial x_2} \right) \\ & - a \left(y_2 \frac{\partial K^s}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial K^s}{\partial y_2} \right) + \delta_2 \left(y_2 \frac{\partial K^s}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial K^s}{\partial x_3} \right) \end{aligned}$$

Sea L el operador diferencial,

$$(3.3) \quad L = \delta_1 a \left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + a \left[\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \left(y_2 \frac{\partial}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \right] - \delta_2 \left(y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Entonces la condición (1.4) es equivalente a que $L(K^s) = 0$, $s = 3, \dots$, para un polinomio homogéneo de grado s , $K^s \in \text{Ker}(L_{AT}^s)$.

Consideremos el cambio de coordenadas siguiente,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \zeta_1 &= x_1 + i y_1, & \bar{\zeta}_2 &= x_2 + i x_3, & \zeta_3 &= y_2 + i y_3 \\ \bar{\zeta}_1 &= x_1 - i y_1, & \bar{\zeta}_2 &= x_2 - i x_3, & \bar{\zeta}_3 &= y_2 - i y_3. \end{aligned}$$

Esta no es una transformación simpléctica, pero a través de ella mostraremos que en las coordenadas simplécticas x_j, y_j , $\text{Ker}(L_{AT}^s)$ tiene la forma especial enunciada en el Teorema.

En las coordenadas $\zeta_j, \bar{\zeta}_j$, tenemos

$$\begin{aligned} L(\zeta^k \bar{\zeta}^l) &= \zeta^k \bar{\zeta}^l i a \{ \delta_1 (k_1 - l_1) + (k_2 - l_2) + (k_3 - l_3) \} \\ &\quad - \delta_2 \zeta^k \bar{\zeta}^l \{ k_2 \zeta_2^{-1} \zeta_3 + l_2 \bar{\zeta}_2^{-1} \bar{\zeta}_3 \}, \end{aligned}$$

y como

$$K^s(\zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{|k|+|l|=s} h_{kl} \zeta^k \bar{\zeta}^l, \quad h_{kl} \in \mathbb{C},$$

obtenemos que, para que un polinomio homogéneo K^s esté en $\text{Ker}(L_{AT})$, debe satisfacerse

$$\begin{aligned} L(K^s) &= \sum_{|k|+|l|=s} h_{kl} \zeta^k \bar{\zeta}^l i a \{ \delta_1 (k_1 - l_1) + (k_2 - l_2) + (k_3 - l_3) \} \\ &\quad - \delta_2 \sum_{|k|+|l|=s} h_{kl} \zeta^k \bar{\zeta}^l \{ k_2 \zeta_2^{-1} \zeta_3 + l_2 \bar{\zeta}_2^{-1} \bar{\zeta}_3 \} \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{|k|+|l|=s} h_{kl} \zeta^k \bar{\zeta}^l ia \{ \delta_1 (k_1 - l_1) + (k_2 - l_2) + (k_3 - l_3) \} \\
 & - \delta_2 \sum_{|k|+|l|=s} h_{kl} \left\{ k_2 \zeta_2^{k_2-1} \zeta_3^{k_3+1} \bar{\zeta}_2^{l_2} \bar{\zeta}_3^{l_3} + l_2 \zeta_2^{k_2} \zeta_3^{k_3} \bar{\zeta}_2^{l_2-1} \bar{\zeta}_3^{l_3+1} \right\} \zeta_1^{k_1} \bar{\zeta}_1^{l_1} \\
 (3.5) = & \sum_{|k|+|l|=s} \left\{ h_{kl} ia \langle k-l, (\delta_1, 1, 1) \rangle - \delta_2 \left[k_2 + 1 h_{(k_1, k_2+1, k_3-1, l_1, l_2, l_3)} \right. \right. \\
 & \left. \left. + (l_2 + 1) h_{(k_1, k_2, k_3, l_1, l_2+1, l_3-1)} \right] \right\} \zeta^k \bar{\zeta}^l \\
 = & 0
 \end{aligned}$$

De aquí obtenemos el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned}
 & h_{kl} ia \langle k-l, (\delta_1, 1, 1) \rangle \\
 & - \delta_2 \left[(k_2 + 1) h_{(k_1, k_2+1, k_3-1, l_1, l_2, l_3)} + (l_2 + 1) h_{(k_1, k_2, k_3, l_1, l_2+1, l_3-1)} \right] \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

pues los $\{\zeta^k \bar{\zeta}^l\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{C}$. Equivalentemente, tenemos el sistema

$$\begin{aligned}
 & h_{kl} ia \langle k-l, (\delta_1, 1, 1) \rangle \\
 (3.6) = & -i\delta_2 \left[(k_2 + 1) h_{(k_1, k_2+1, k_3-1, l_1, l_2, l_3)} + (l_2 + 1) h_{(k_1, k_2, k_3, l_1, l_2+1, l_3-1)} \right].
 \end{aligned}$$

Consideremos el subconjunto de $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3$ definido por:

$$M_{\delta_1} = \{r = (k, l) = (k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 / \langle k-l, (\delta_1, 1, 1) \rangle = 0\}.$$

Si $(k, l) \notin M_{\delta_1}$, $\langle k-l, (\delta_1, 1, 1) \rangle \neq 0$ y de (??) tenemos los siguientes casos:

i) $k_3 = 0$ y/o $l_3 = 0$. En este caso $h_{kl} = 0$, pues los términos de exponentes, $(k_1, k_2 + 1, -1, l_1, l_2, l_3)$ y $(k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 + 1, -1)$ no están en $K^s(\zeta, \bar{\zeta})$ y, entonces, los coeficientes de tales términos son nulos.

ii) $k_3 \neq 0$ y $l_3 \neq 0$. Supongamos $l_3 > 0$ y $k_3 = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 & h_{(k_1, k_2, 1, l_1, l_2, l_3)} \\
 & = \frac{(-i\delta_2)^{l_3} (l_2 + l_3)!}{l_2! \langle k-l, (\delta_1, 1, 1) \rangle^{l_3} a^{l_3}} h_{(k_1, k_2, 1, l_1, l_2 + l_3, 0)} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Supóngase que, para $l_3 > 0$ y $k_3 \leq p$, se tiene $h_{kl} = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
 & h_{(k_1, k_2, p+1, l_1, l_2, l_3)} \\
 & = \frac{-i\delta_2}{\langle k-l, (\delta_1, 1, 1) \rangle a} \left[(k_2 + 1) h_{(k_1, k_2+1, p, l_1, l_2, l_3)} \right. \\
 & \left. + (l_2 + 1) h_{(k_1, k_2, p+1, l_1, l_2+1, l_3-1)} \right] \\
 & = \frac{(-i\delta_2)^{l_3} (l_2 + l_3)!}{l_2! \langle k-l, (\delta_1, 1, 1) \rangle^{l_3} a^{l_3}} h_{(k_1, k_2, p+1, l_1, l_2 + l_3, 0)} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

pues, $h_{(k_1, k_2+1, p, l_1, l_2+j, l_3-j)} = 0$, $j = 0, 1, 2, \dots$, por hipótesis. Luego, por inducción, $h_{kl} = 0$, para todo (k, l) con $l_3 > 0, k_3 > 0$. Se sigue de aquí que $h_{kl} = 0$, para todo $(k, l) \notin M_{\delta_1}$, independientemente de δ_2 .

Si $(k, l) \in M_{\delta_1}$, de (3.6) tenemos que,

$$(3.7) \quad k_2 h_{(k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3)} = -(l_2 + 1) h_{(k_1, k_2-1, k_3+1, l_1, l_2+1, l_3-1)},$$

donde $\delta_1 k_1 + k_2 + k_3 = \delta_1 l_1 + l_2 + l_3$, para todo (k, l) con $|k| + |l| = s$. Por lo tanto, si $K^s \neq 0$, s es un número par, independiente de δ_1 .

iii) Consideremos k_1 y l_1 fijos. Sea $k_2 \leq l_3$ (o equivalentemente $k_3 \geq l_2$). Considerando el orden parcial en los (k, l) , definida por,

$$(3.8) \quad (k, l) \prec (k', l'), \text{ si y sólo si, } l_2 < l'_2$$

obtenemos la siguiente sucesión ordenada de sub-índices (k, l) relacionados por la igualdad (3.7),

$$(3.9) \quad \begin{aligned} (k_1, k_2 + l_2 - j, k_3 - l_2 + j, l_1, j, k_2 + k_3 - j) &:= (j), \\ j &= 0, 1, 2, \dots, k_2 + l_2 \end{aligned}$$

y, por (3.7),

$$h_{(0)} = (-1)^j \frac{j!(k_2 + l_2 - j)!}{(k_2 + l_2)!} h_{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, k_2 + l_2,$$

es decir ,

$$(3.10) \quad h_{(j)} = (-1)^j \binom{k_2 + l_2}{j} h_{(0)}, \quad j = 1, \dots, k_2 + l_2.$$

Sumando todos los términos en K^s , correspondientes a los sub-índices de la sucesión (3.9) y considerando (3.10), con $Z = (\zeta, \bar{\zeta})$, obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k_2+l_2} h_{(j)} Z^{(j)} \\ &= \left[\sum_{j=0}^{k_2+l_2} (-1)^j \binom{k_2 + l_2}{j} \zeta_2^{k_2+l_2-j} \bar{\zeta}_2^j \zeta_3^{j-k_2+l_2-j} \right] \zeta_1^{k_1} \bar{\zeta}_1^{l_1} \zeta_3^{k_3-l_2} \bar{\zeta}_3^{k_3-l_2} h_{(0)} \\ &= \left(\zeta_2 \bar{\zeta}_3 - \bar{\zeta}_2 \zeta_3 \right)^{k_2+l_2} \left(\zeta_1^{k_1} \bar{\zeta}_1^{l_1} \right) \left(\zeta_3 \bar{\zeta}_3 \right)^{k_3-l_2} h_{(0)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

De la misma forma, si $k_2 > l_3$ (o equivalentemente, $k_3 < l_2$) y para k_1 y l_1 fijos, obtenemos una sucesión de sub-índices

$$(k_1, k_2 + k_3 - j, j, l_1, l_2 - k_3 + j, l_3 + k_3 - j) := (j), j = 0, 1, 2, \dots, l_3 + k_3$$

ordenados por un *orden parcial* similar al dado en (3.8), y entonces, sumando los términos correspondientes de K^s , obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{k_3+l_3} h_{(j)} Z^{(j)} \\
 &= \left[\sum_{j=0}^{k_3+l_3} (-1)^j \binom{k_3+l_3}{j} \zeta_2^{k_3+l_3-j} \bar{\zeta}_2^j \zeta_3^{k_3+l_3-j} \bar{\zeta}_3^j \right] \zeta_1^{k_1} \bar{\zeta}_1^{l_1} \zeta_2^{l_2-k_3} \bar{\zeta}_2^{l_2-k_3} h_{(0)} \\
 &= (\zeta_2 \bar{\zeta}_3 - \bar{\zeta}_2 \zeta_3)^{k_3+l_3} (\zeta_1^{k_1} \bar{\zeta}_1^{l_1}) (\zeta_2 \bar{\zeta}_2)^{l_2-k_3} h_{(0)}.
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Considerando que

$$\begin{aligned}
 \Gamma_2 &= \frac{1}{2}(y_2^2 + y_3^2) = \frac{1}{2}\zeta_3 \bar{\zeta}_3, \\
 \Gamma_3 &= x_3 y_2 - x_2 y_3 = \frac{-i}{2}(\zeta_2 \bar{\zeta}_3 - \bar{\zeta}_2 \zeta_3), \\
 \Gamma_4 &= \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) = \frac{1}{2}\zeta_2 \bar{\zeta}_2
 \end{aligned}$$

y sustituyendo en (3.11) y (3.12), obtenemos que los términos de K^s pueden ser agrupados de tal forma que las sumas sólo dependan de las cantidades $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, con exponentes enteros no negativos, y de los productos $\zeta_1^{k_1} \bar{\zeta}_1^{l_1}$; como s es par y los Γ_j aportan exponentes pares al grado de K^s , necesariamente en los exponentes de $\zeta_1^{k_1} \bar{\zeta}_1^{l_1}$ debe tenerse que $k_1 + l_1$ es par.

Por lo expuesto, si $K^s \neq 0$ y $K^s \in \text{Ker}(L_{A^T})$, entonces

$$K^s(\zeta, \bar{\zeta}) = f^s(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4),$$

donde f^s es un polinomio homogéneo de orden $(s/2)$ en $\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ y Γ_4 , con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Además, $\{H_0^T, K^s\} = 0$ implica que

$$\begin{aligned}
 \{H_0^T, K^s\} &= \delta_1 a \left[x_1 \left(K_{\zeta_1}^s i + K_{\bar{\zeta}_1}^s (-i) \right) - y_1 \left(K_{\zeta_1}^s + K_{\bar{\zeta}_1}^s \right) \right] \\
 &\quad - a \left[x_2 \left(K_{\Gamma_3}^s y_2 + K_{\Gamma_4}^s x_3 \right) - x_3 \left(-K_{\Gamma_3}^s y_3 + K_{\Gamma_4}^s x_2 \right) \right] \\
 &\quad - a \left[y_2 \left(-K_{\Gamma_3}^s x_2 + K_{\Gamma_2}^s y_3 \right) - y_3 \left(K_{\Gamma_3}^s + K_{\Gamma_2}^s y_2 \right) \right] \\
 &\quad + \delta_2 \left[y_2 \left(-K_{\Gamma_3}^s y_3 + K_{\Gamma_4}^s x_2 \right) + y_3 \left(K_{\Gamma_3}^s y_2 + K_{\Gamma_4}^s x_3 \right) \right] \\
 &= i\delta_1 a \left[K_{\zeta_1}^s \zeta_1 - K_{\bar{\zeta}_1}^s \bar{\zeta}_1 \right] + \delta_2 [x_2 y_2 + x_3 y_3] K_{\Gamma_4}^s \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

con $s > 2$. De aquí obtenemos la igualdad de polinomios

$$(3.13) \quad i\delta_1 a [K_{\zeta_1}^s \zeta_1 - K_{\bar{\zeta}_1}^s \bar{\zeta}_1] = -\delta_2 [x_2 y_2 + x_3 y_3] K_{\Gamma_4}^s.$$

Como K^s tiene la forma

$$K^s = \sum_{k_1+l_1+2(n_2+n_3+n_4)=s} h_{(k_1,l_1,n_2,n_3,n_4)} \zeta_1^{k_1} \bar{\zeta}_1^{l_1} \Gamma_2^{n_2} \Gamma_3^{n_3} \Gamma_4^{n_4},$$

(3.14) es equivalente a

$$\begin{aligned} & i\delta a \sum_{k_1+l_1+2(n_2+n_3+n_4)=s} (k_1 - l_1) h_{(k_1,l_1,n_2,n_3,n_4)} \zeta_1^{k_1} \bar{\zeta}_1^{l_1} \Gamma_2^{n_2} \Gamma_3^{n_3} \Gamma_4^{n_4} \\ & = -\delta_2 \sum_{k_1+l_1+2(n_2+n_3+n_4)=s} n_4 h_{(k_1,l_1,n_2,n_3,n_4)} \zeta_1^{k_1} \bar{\zeta}_1^{l_1} \Gamma_2^{n_2} \Gamma_3^{n_3} \Gamma_4^{n_4-1} \end{aligned}$$

Comparando exponentes (en x_2 o x_3), necesariamente ambos miembros en (3.13) deben ser nulos. Entonces tenemos que

- $k_1 = l_1$ o $h_{(k_1,l_1,n_2,n_3,n_4)} = 0$, si consideramos el primer miembro, y
- $n_4 = 0$ o $h_{(k_1,l_1,n_2,n_3,n_4)} = 0$, si consideramos el segundo, lo que implica que K^s no depende de Γ_4 .

De lo anterior tenemos que si

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \zeta_1 \bar{\zeta}_1 = \frac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2),$$

$K^s \in \text{Ker}(L_{AT}^s)$, $K^s \neq 0$ con $s > 2$, entonces s es par y $K^s = f^s(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$, donde f^s es un polinomio homogéneo en $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ de orden $\frac{s}{2}$ con coeficientes reales. Notemos que utilizando la transformacin inversa, es decir, de las coordenadas complejas a las reales originales, la expresi3n de K^s no es alterada, por lo que est3 demostrada la parte (I) del Teorema.

II) La parte (II) es una consecuencia inmediata de la parte (I), pues todos los t3rminos H^s de grado $s+2$, con $s > 0$, de H^* est3n en $\text{Ker}(L_{AT}^{s+2})$ y H^0 mantiene su forma normal original.

Luego, el Teorema est3 demostrado.

■

References

- [1] Arnold V. I. : *Mathematical Methods of Classical Machanics*. Springer-Verlag New York, Inc., (1978).

- [2] Laub, A. J. and Meyer, K.: *Canonical Forms for Symplectic and Hamiltonian Matrices*. Celestial Mechanics, Vol. 9, pp. 233-238, (1974).
- [3] Mansilla, J. E.: *Sobre el núcleo del operador de Lie en el caso de tres grados de libertad y raíces imaginarias puras con dos frecuencias iguales*. Pre-print, (2001).
- [4] Meyer, K. R. and Hall, G.R.: *Introduction to Hamiltonian Dynamical System and the N-Body Problem*. Springer-Verlag, New York, (1992).
- [5] Sokol'skii, A. G.: *On the stability of autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom in the case equal frequencies*. P. M. M., Vol. 38, pp. 741-749, (1974).

José Mansilla

Departamento de Matemática y Física,
Universidad de Magallanes
Casilla 113-D
Punta Arenas
Chile
e-mail : emansi@ona.fi.umag.cl