*Stochastic analysis and
probabilistic design in
Geotechnic. Application in
geotechnical design of plain
footings on cohesive soils*

Análisis estocástico y diseño probabilista en la geotecnia. Aplicación al diseño geotécnico de cimentaciones superficiales en suelos cohesivos

Autores

QUEVEDO, G.

Doctor en Ciencias
Decano de la Facultad de Construcciones
Dean of Faculty of Construction

Universidad Central de Las Villas. Centro de Investigación y
Desarrollo de las Estructuras y los Materiales (CIDEM). Santa Clara,
Villa Clara, Cuba. Carretera a Camajuaní Km. 5 ½ Santa Clara, Villa
Clara, Cuba. C.P. 54830. Tel. 53-42-281561, Fax. 53-42-281539

MARTÍNEZ, A.

Máster en Geotecnia y Estructuras
Ingeniero Principal de Proyectos
Project Main Engineer

Empresa de Diseño y Servicios de Ingeniería. MINAL. Villa Clara.
Carretera central, # 212, entre Danielito y Jesús Menéndez.
Reperto Virginia. Santa Clara. Villa Clara. Cuba. C.P. 54 100.
Tel. 53-42-202702

Fecha de recepción 14/09/2010

Fecha de aceptación 01/12/2010

Resumen

Se propone el uso de una metodología para llevar a cabo un proceso de modelación estocástica en el cálculo de la capacidad de carga de una cimentación corrida, apoyada sobre un suelo puramente cohesivo. La citada modelación se basa en la aplicación del Método de Simulación de Monte Carlo, con el cual se obtienen resultados mucho más eficientes que los alcanzados empleando modelos deterministas, tales resultados serán la base para la aplicación de un método de diseño de naturaleza probabilista, específicamente la teoría de

seguridad, el cual parte de una caracterización estadística de cada una de las variables que inciden en el problema, en este caso consideradas como aleatorias, y define como resultado final, un cierto nivel de seguridad para la estructura, cuyo valor será el más cercano posible a la seguridad requerida en el diseño por el primer estado límite o estado límite de estabilidad, equivalente esta a 0.98. De esta manera queda establecido el punto de diseño de la estructura de acuerdo a la condición de diseño por seguridad.

Palabras clave: Modelación estocástica, capacidad de carga, simulación de Monte Carlo, diseño probabilista, teoría de seguridad.

Abstract

A methodology to carry out a process of stochastic modeling in the calculation of the capacity of load of a strip footing, on a purely cohesive soil, is proposed. The mentioned modeling is based on the application of the Monte Carlo Simulation, which is more efficient, in terms of results, than the classic procedures using deterministic models. These results will be the base for the application of a probabilistic design method, specifically the safety theory,

starting by a statistical characterization of every variables that impact in the problem, in this case considered as random, and it defines as a final result, a safety level for the structure, whose value will be the nearest to the safety required in the design by the first limit state limit or stability limit state, it is equivalent to 0.98. By this way it is established the design point of the structure according to the design condition for safety.

Key words: Stochastic modeling, bearing capacity, Monte Carlo simulation, probabilistic design, theory of safety.

1. Introducción

En los últimos años se han llevado a cabo numerosas investigaciones encaminadas al estudio de la seguridad de las obras, aplicándose métodos probabilísticos de diseño que permiten, a partir de la definición de las variables aleatorias consideradas en el problema y estableciendo el aparato matemático correspondiente, definir la seguridad obtenida en el diseño.

Particularmente, en el diseño de problemas geotécnicos, se han abordado en las últimas décadas gran cantidad de trabajos que hacen uso de estos métodos, cuestión que generó como primer elemento, la introducción del Método de los Estados Límites y posteriormente, basado en este, la introducción de la Teoría de la Seguridad en el diseño, con la cual se garantiza un respaldo estadístico y probabilista de todo el proceso.

Independientemente a la convergencia en cuanto al uso de métodos matemáticos afines para la solución, ya sea del problema de la modelación así como del problema de diseño, no se habían encontrado trabajos que lograran relacionar estas dos etapas de la ingeniería, donde se pudiera obtener, partiendo de una definición y caracterización estadística correcta de cada una de las variables que inciden en dicho problema, una respuesta aleatoria de las mismas, la cual sería usada posteriormente en el análisis de la seguridad de la estructura, quedando establecida de este modo, una metodología para una verdadera modelación estocástica vinculada al análisis de seguridad.

La modelación estocástica de cualquier problema está asociada al empleo en ella del método de Monte Carlo, el cual como se ha explicado, transforma la distribución estadística de cada variable considerada aleatoria, en un número de valores puntuales de la misma, que representen de igual forma su variabilidad; sin embargo esta generación requiere de un procesamiento de gran cantidad de datos, a fin de obtener un resultado confiable, factor que desfavorece el estudio debido al alto costo computacional que representa desarrollar cada uno de ellos; si a esto se le adiciona el procedimiento de análisis de seguridad, resulta inevitable concluir que para lograr un diseño real, homologado y eficiente, es preciso relacionar ambas materias en una metodología general que pueda ser evacuada en el menor tiempo posible, quedando establecidas así las bases para la formulación del problema de la presente investigación.

De lo anteriormente citado se puede deducir que este trabajo pretende implementar un procedimiento ma-

temático-estadístico con asistencia computacional que permita la integración de la modelación estocástica o aleatoria, específicamente de problemas de ingeniería geotécnica, con el proceso de diseño de la estructura mediante métodos probabilísticos.

2. Fundamentos conceptuales del método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo nos presenta una forma de pasar, con cierto grado de elegancia, de una metodología determinista a una metodología de naturaleza estocástica, la cual está considerada como una metodología más racional y completa. (Ripley, 1987; Leuangthong, 2006).

Figura 1 Simulación estocástica de problemas ingenieriles por el método de Monte Carlo

La idea general del método de Monte Carlo dentro de la mecánica computacional se resume como sigue: Sean las respuestas " y " de un sistema, dependientes de un grupo de variables aleatorias " x ", cuya descripción probabilística es conocida, es posible obtener, mediante algoritmos de generación de números aleatorios, un muestreo de variables x lo suficientemente grande, de manera que sus histogramas se aproximen, de forma más exacta, a la descripción probabilística conocida mientras mayor sea el tamaño de la muestra. Mediante el uso de un código de análisis o método de diseño del sistema, utilizado de forma determinista (cada ejecución con un grupo de variables aleatoria como entrada), es posible generar una población de variables dependientes " y " del mismo tamaño que el muestreo. Este concepto se puede resumir en la Figura 1.

3. Descripción del modelo empleado y formulación matemática

El problema de estudio, inherente a la presente investigación, se basa en la aplicación de la modelación estocástica a un ejemplo práctico de la ingeniería geotécnica, se ha escogido para esta investigación un caso ingenieril considerado como el más simple de la Ingeniería Geotécnica, este resulta ser el cálculo de la capacidad de carga de una cimentación corrida, sobre suelos puramente cohesivos; considerándose la mayoría de las variables de entrada como variables aleatorias, a fin de obtener como resultado del proceso de diseño, una salida también aleatoria, de este modo, se procederá posteriormente a la aplicación de métodos probabilísticos de diseño, específicamente mediante el empleo de la teoría de la seguridad.

El caso en análisis, desde el punto de vista de diseño, se basa en obtener el valor de la capacidad de carga de una cimentación corrida; para lo cual debe cumplirse la siguiente condición (Quevedo, 2002):

$$N^* \leq Q_{bt}^* \quad (\text{Fórmula 1})$$

Donde:

Q_{bt} : Carga bruta de trabajo resistente a la estabilidad de la base de la cimentación.

N : Carga vertical resultante de todas las solicitudes a nivel de cimentación.

Por otra parte el valor de la Q_{bt}^* para cimientos rectangulares se determina a partir de:

$$Q_{bt}^* = bc' \cdot lc' \cdot \left(\frac{q_{br}^* - q'^* + q'^*}{\gamma_s} \right) \quad (\text{Fórmula 2})$$

Donde:

q_{br}^* : Carga bruta de rotura resistente a la estabilidad de la base de la cimentación y se determina a partir de las expresiones definidas por Brinch Hansen (Brinch Hansen, 1970) que plantean:

$$q_{br}^* = 5.14 C^* (1 + s'_c + d'_c - i'_c - g'_c) + q'^* \quad (\text{Fórmula 3})$$

Donde:

L' : Lado mayor entre l' y b'

B' : Lado menor entre l' y b'

C^* : Cohesión de cálculo, del suelo.

s'_c : Factor de corrección debido al efecto de la forma del cimiento (Suelos Cohesivos).

d'_c : Factor que valora el efecto de la profundidad a la cual se ha desplantado la cimentación. (Suelos Cohesivos).

i'_c : Factor de inclinación de la carga actuante. (Suelos Cohesivos).

g'_c : Factor de inclinación del terreno. (Suelos Cohesivos).

Teniendo en cuenta que los casos en análisis se basan en aplicar estas expresiones a suelos puramente cohesivos, se han establecido una serie de consideraciones e hipótesis que simplifican la ecuación de diseño a la siguiente expresión:

$$q_{br}^* = 5.14 \cdot C^* \quad (\text{Fórmula 4})$$

En este caso se considera como variable aleatoria a la cohesión del suelo (C), y como determinista, el ancho b de la cimentación.

Con respecto a las cargas, se considera el caso de una carga vertical centrada, generada debido a acciones de diferente naturaleza, estas también serán asumidas como variables aleatorias, aunque para el caso analizado, la carga no incide directamente en la variable de salida de capacidad de carga Q_{br} , pero sí en el chequeo de la condición de diseño, incluso en el análisis de la seguridad.

4. Características estocásticas de las variables de entrada

Las variables asumidas como estocásticas para esta investigación, devienen lógicamente, de la condición de diseño para el primer estado límite. Para suelos puramente cohesivos son estocásticas: la cohesión del suelo, también se consideran aleatorias la carga permanente vertical actuante, la carga temporal vertical y la carga vertical de viento y por último el ancho de la cimentación B se toma como parámetro determinista.

Todas estas variables han sido muy bien caracterizadas en trabajos precedentes (Quevedo, 1987; Quevedo, 2002; Hospitaler, 1997; Becker, 1996; Blázquez, 1984), llegándose a determinar los valores de sus coeficientes de variación, los cuales son:

Coficiente de variación de la cohesión
 $v_c = 0.138, 0.26, 0.336$

Coficiente de variación del peso específico
 $v_g = 0.05$

Coficiente de variación de la carga muerta
 $v_{cm} = 0.10$

Coeficiente de variación de la carga viva
 $v_{cv} = 0.25$

Coeficiente de variación de la carga de viento extremo
 $v_{viento} = 0.31$

5. Aplicación de la metodología para la modelación estocástica convencional en un ejemplo de cálculo de capacidad de carga

El procedimiento de modelación estocástica parte de la caracterización estadística de las cargas, luego, aplicar el método de Monte Carlo, y finalmente obtener el nivel de seguridad requerido para el diseño. En suelos cohesivos, se ha planteado que las variables consideradas aleatorias son la cohesión del suelo y la carga vertical actuante en la base de la cimentación, esta última como combinación de la carga permanente, la carga temporal y la carga de viento.

A continuación se resumen todas las posibles combinaciones que intervienen en el diseño del experimento.

Tabla 1 Combinaciones analizadas en el cálculo de la capacidad de carga para suelos puramente cohesivos

Combinaciones para el diseño del experimento teórico (suelo C)			
No. de la Combinación	Tipo de Suelo	Cohesión del Suelo Kpa.	Coef. de Variac. de C
1	C	40	0,138
2	C	40	0,26
3	C	40	0,336
4	C	60	0,138
5	C	60	0,26
6	C	60	0,336
7	C	80	0,138
8	C	80	0,26
9	C	80	0,336

Conviene aclarar que para la totalidad de las variables se ha asumido, partiendo de estudios anteriores, que el tipo de distribución al que se ajustan las mismas es a una distribución normal, y que sus valores corresponden al valor medio.

Con el propósito de llevar a cabo la generación de números aleatorios en función del tipo de distribución definida para la variable, se ha implementado en el software Mathcad, el citado mecanismo, para variables con distribución normal, a través de la función "rnorm", la cual depende del tamaño de la muestra, la media y desviación típica de la variable analizada.

Luego, a partir de los resultados obtenidos en la generación aleatoria, es decir, vectores de 4.000 valores de C , γ , N_{cm} , N_{cv} y N_v , se procede a obtener la estadística descriptiva de cada una de las variables a fin de comprobar estos resultados con los que fueron empleados para la generación. Finalmente se comprueba la aleatoriedad y normalidad de los datos resultantes a través de una prueba de bondad de ajuste de los resultados obtenidos, obteniéndose como resultado que, luego de dicha generación, todas las variables provienen de una distribución normal, tal y como se había supuesto al inicio del procedimiento (Centeno, 1995). La tabla 2 muestra los resultados obtenidos mediante esta prueba, para uno de los casos analizados.

6. Bases matemáticas y formulación general para la aplicación de métodos probabilísticos en la modelación estocástica

El punto de partida para implementar este paso se basa en tomar los valores medios resultantes de la generación aleatoria de cada una de las variables declaradas como estocásticas, posteriormente se procede a caracterizar estadísticamente los n valores de las funciones de las cargas actuantes Y_{1i} , a fin de obtener su valor medio, su desviación estándar y su correspondiente coeficiente de variación. Posteriormente debe determinarse la σ_{qbr} , a través del método de generalización del teorema de la desviación estándar (σ) y su desarrollo en serie de Taylor.

Es conocido que para una variable de respuesta, en este caso q_{br} , que es función de varias variables aleatorias de entrada, se puede determinar la desviación de

dicha función aplicando el método de generalización del teorema de la desviación estándar y su desarrollo en serie de Taylor, lo cual, de forma general se puede expresar como:

$$\sigma_Y^2 = \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (\text{Fórmula 5})$$

Siendo $y = f(x_i)$.

En nuestro caso, la q_{br} se determina a partir de la fórmula 4, para suelos cohesivos (Quevedo, 2002), obteniéndose las siguientes expresiones:

$$\sigma_{q_{br}}^2 = \left(\frac{\partial q_{br}}{\partial c} \right)^2 \sigma_c^2 \quad (\text{Fórmula 6})$$

Seguidamente se determinan los coeficientes de seguridad y con ellos se llega a obtener el valor del K de diseño a través de la expresión:

$$K_d = \gamma_g \cdot \gamma_f \cdot \gamma_s \quad (\text{Fórmula 7})$$

O alternativamente mediante la expresión:

$$K_d = \frac{Y_2}{Y_1} \quad (\text{Fórmula 8})$$

Luego, conocido v_{y1} y v_{y2} , en la ecuación general de nivel de seguridad se evalúan los distintos valores del coeficiente de seguridad global K , obteniendo la curva H vs. K del problema analizado. (Se puede hacer el análisis, de manera similar, en términos de β).

$$H = 0.5 + \phi_n \left[\frac{k-1}{\sqrt{v_{Y_1}^2 + k^2 v_{Y_2}^2}} \right] \quad (\text{Fórmula 9})$$

Partiendo de los resultados obtenidos en la simulación estocástica de las variables de entrada así como de la caracterización estadística de la variable respuesta q_{br} y siendo definidas las características de las cargas actuantes, puede aplicarse la ecuación general de la teoría de seguridad a fin de definir la curva de nivel de seguridad H vs. K y sobre la misma determinar el punto de diseño a partir del valor del H_{req} ($H_{req} = 0,98$).

De aquí que resulte evidente, para el diseño geotécnico de una cimentación corrida, que:

$$\begin{aligned} Y_1 &= N & \sigma_{y1} &= \sigma_N & v_{y1} &= \frac{\sigma_N}{N} \\ Y_2 &= q_{br} & \sigma_{y2} &= \sigma_{q_{br}} \end{aligned} \quad (\text{Fórmula 10})$$

$$v_{y2} = \frac{\sigma_{q_{br}}}{q_{br}} \quad (\text{Fórmula 11})$$

Tabla 2 Resultados de una prueba de bondad de ajuste: Kolmogorov – Smirnov, para las variables generadas aleatoriamente. Suelo cohesivo: $C = 60\text{kPa}$, $v = 0.138$, $\gamma = 18\text{ Kn/m}^3$, $N_{cm} = 100\text{ Kn}$, $N_{cv} = 50\text{ Kn}$ y $N_{cw} = 20\text{ Kn}$

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		C	γ	Ncm	Ncv	Ncw
N		4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
Normal Parameters	Mean	60,1636	18,0062	99,7995	50,1102	19,9268
	Std. Deviation	8,2574	,9113	9,9983	12,6759	6,1896
Most Extreme Differences	Absolute	0,011	0,009	0,008	0,006	0,009
	Positive	0,011	0,008	0,008	0,006	0,009
	Negative	-0,008	-0,009	-0,005	-0,005	-0,006
Kolmogorov-Smirnov Z		0,669	0,584	0,478	0,409	0,546

a Test distribution is Normal.
b Calculated from data.

Por lo que la ecuación que relaciona H con K para el problema de estudio resulta:

$$H = 0.5 + \phi_n \left[\frac{k-1}{\sqrt{v^2_N + k^2 v^2_{qbr}}} \right] \quad (\text{Fórmula 12})$$

El análisis anterior se ha realizado partiendo de un valor inicial de ancho (b) de la cimentación, obtenido con los valores medios de las variables que intervienen en la ecuación de capacidad de carga. (Fórmula 4). Con estos valores de b se realiza el diseño, generándose primeramente valores aleatorios para cada variable, luego se obtienen los valores de capacidad de carga y por último se calcula la probabilidad de falla, obteniéndose resultados aproximados al 50%, en concordancia con lo establecido en las bases teóricas del diseño probabilista. Luego, teniendo en cuenta que los valores de b obtenidos anteriormente no satisfacen la condición de probabilidad de falla en cimentaciones, es necesario encontrar los valores de b que garanticen tal condición, para esto se lleva a cabo nuevamente el proceso de diseño, partiendo de un valor de b que se irá variando hasta satisfacer la citada condición ($P_f \leq 0.02$), o sea

$H=0.98$ (Nivel de seguridad). Estos resultados, son los que pueden verse en las tablas 3 y 4.

De los resultados anteriores se concluye que cuando se trabaja con la b de diseño, en primer lugar, los valores de Y_2 generan un resultado mucho menor que cuando lo obtenemos con la b requerida ya que de hecho esta última es más grande, asimismo sucede con los $K_{diseño}$, los cuales son muy inferiores para la primera de las b y distan mucho del óptimo, permitiendo valores de probabilidad de falla equivalentes al 50%, sin embargo al incrementar el valor de b, se observa una convergencia de los resultados al valor de $K_{requerido}$ y por ende a una probabilidad de falla de 0.02, siendo este, el objetivo final de un diseño por criterio de seguridad.

Por otra parte, cuando se realiza la comparación de los resultados obtenidos suministrando los coeficientes tomados del análisis matemático y los tomados del análisis aleatorio, la conclusión más importante radica en que los valores de la variable V_{y2} , conjuntamente con los $K_{diseño}$, experimentan un ligero incremento, no sucede así con la probabilidad de falla de la estructura, siendo los valores aceptables los obtenidos con los coeficientes de variación aleatorios.

Tabla 3 Resultados del diseño probabilista, con entrada de variables estocásticas o aleatorias, para suelos puramente cohesivos y empleando la b de diseño

RESULTADOS DEL DISEÑO MEDIANTE MÉTODOS PROBABILÍSTICOS (Suelos C, $b_{diseño}$) Coeficientes de Variación del Análisis Aleatorio								
Combinación	$b_{dis.}$	Y1	$vY1$	Y2	$vY2$	Kd	K_{opt}	Prob. de Falla
1	0.62	126,461	0,095	127,82	0,137	1,01	1,46	0,474
2	0.62	126,461	0,095	128,127	0,258	1,013	2,17	0,481
3	0.62	126,461	0,095	128,318	0,333	1,015	3,19	0,483
4	0.42	126,461	0,095	129,881	0,137	1,027	1,46	0,437
5	0.42	126,461	0,095	130,193	0,258	1,03	2,17	0,458
6	0.42	126,461	0,095	130,388	0,333	1,031	3,19	0,465
7	0.31	126,461	0,095	127,82	0,137	1,011	1,46	0,474
8	0.31	126,461	0,095	128,127	0,258	1,013	2,17	0,481
9	0.31	126,461	0,095	128,318	0,333	1,015	3,19	0,483

Tabla 4 Resultados del diseño probabilista, con entrada de variables estocásticas o aleatorias, para suelos puramente cohesivos y empleando la b requerida

RESULTADOS DEL DISEÑO MEDIANTE METODOS PROBABILÍSTICOS (Suelos C, b requerida) Coeficientes de Variación del Análisis Aleatorio								
Combinación	breq.	Y1	uY1	Y2	uY2	Kd	Kopt	Prob. de Falla
1	0.895	126,461	0,095	184,514	0,137	1,459	1,46	0,019
2	1.328	126,461	0,095	274,439	0,258	2,17	2,17	0,02
3	1.95	126,461	0,095	403,582	0,333	3,191	3,19	0,02
4	0.597	126,461	0,095	184,617	0,137	1,46	1,46	0,019
5	0.885	126,461	0,095	274,336	0,258	2,169	2,17	0,02
6	1.30	126,461	0,095	403,582	0,333	3,191	3,19	0,02
7	0.448	126,461	0,095	184,72	0,137	1,461	1,46	0,019
8	0.664	126,461	0,095	274,439	0,258	2,17	2,17	0,02
9	0.975	126,461	0,095	403,582	0,333	3,191	3,19	0,02

Las siguientes gráficas muestran tal apreciación:

Figura 2 Nivel de Seguridad versus Coeficiente de Seguridad para suelos cohesivos, $C=60\text{Kpa}$, $v_c = 0.336$, $b_{req} = 1.30\text{ m}$

a) Coeficientes de Variación tomados del análisis matemático ($v_{qbr} = 0.336$, $v_N = 0.094$).

b) Coeficientes de Variación tomados del análisis aleatorio ($v_{qbr} = 0.333$, $v_N = 0.095$),

Entrando con el $H_{requerido}$, que en este caso resulta 0.98, se pueden obtener los valores del $K_{requerido}$ y con

ellos se define el punto de diseño, el cual garantiza la seguridad adecuada para la estructura.

De las gráficas anteriores vale la pena comentar, que han sido obtenidas para un valor de b requerido, o sea el que garantiza que se cumpla la condición de diseño en seguridad, y se puede concluir que, a pesar de que las diferencias no son sustanciales, con los resultados

que devienen de los coeficientes tomados del análisis aleatorio se logra una convergencia más rápida a garantizar la condición de diseño en seguridad.

Finalmente, se puede afirmar que luego de aplicado este procedimiento novedoso para la simulación estocástica de un problema de ingeniería, y luego de demostrar su factibilidad, específicamente cuando se trabaja considerando la aleatoriedad de todas las variables y por ende de sus coeficientes de variación, valdría la pena observar qué sucede cuando este análisis se combina con la solución numérica del problema y no analítica, sobre esta interrogante tratan otras investigaciones en las que trabajan los autores de este artículo.

7. Conclusiones

La aplicación de la metodología propuesta ha revelado un nuevo mecanismo de diseño de estructuras, basado en hacer cumplir la condición básica de la teoría de la seguridad, que establece que el nivel de seguridad de diseño será mayor o igual al nivel de seguridad requere-

do, el cual para el caso de cimentaciones diseñadas por criterio de estabilidad será de 0.98.

El procedimiento de diseño ha sido desarrollado sobre bases computacionales, y parte de la generación aleatoria de todas las variables consideradas bajo este criterio, luego se le calculan sus parámetros estadísticos y se procede a obtener un ancho de cimentación mediante un diseño realizado para valores medios de todas las variables, tal resultado representa el punto de partida para un ciclo en el que se incrementa el valor de b y que culmina haciendo cumplir la citada condición de diseño en seguridad.

Finalmente, se demuestra la factibilidad de combinar los resultados obtenidos de la modelación estocástica con el análisis de la seguridad, a partir de la aplicación de los conceptos generales de teoría de la seguridad, permitiendo con ellos establecer el punto de diseño correspondiente al nivel de seguridad requerido, aunque no se pretende absolutizar los resultados debido a que se hace necesario comparar estos, con los que se obtienen cuando se desarrolla la solución mediante métodos numéricos.

8. Referencias

1. FENTON, G. A. y D. V. GRIFFITHS, (2000) "Bearing Capacity of Spatially Random Soils" en *8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*.
2. HOSPITALER, A.; CANO, J. J. y J. CANTÓ, (1997). Hipótesis de carga. Coeficientes de seguridad de los materiales. Departamento de Ingeniería de la Construcción, Universidad Politécnica de Valencia, pp. 27.
3. KORIS, K y SZALAI, K., (1998) "Stochastic Distribution of Structural Resistance in Reinforced Concrete Beams" en 2do Simposio de Phds. en Ingeniería Civil. Universidad de Budapest, 1998.
4. LEUANGTHON, O. et al. (2006) *The principles of Monte Carlo Simulation*. Canada, University of Alberta.
5. LU, Y. y X. GU, (2004) "Probability analysis of RC member deformation limits for different performance levels and reliability of their deterministic calculations" en *Structural Safety*. Vol. 26, pp. 367–389.
6. PAPADRAKAKIS, M.; PAPADOPOULOS, V.; Georgioudakis, E.; HOFSTETTER, G.; C. FEIST, C. y T. YVONNE (2003) *Reliability Analysis of A Plain Concrete Beam*. Institute of Structural Analysis and Seismic Research, National Technical University, Athens.
7. PHOON, K. K., (2006) *Modelling and simulation of Stochastic data*. Ponencia. Singapore. Department of civil engineering, University of Singapore.
8. QUEVEDO, G. (2002) *Aplicación de los Estados Límites y la Teoría de Seguridad en el Diseño Geotécnico en Cuba*. Tesis presentada en opción al Grado Científico de Doctor en Ciencias. La Habana, Comisión de Grado Científico de la República de Cuba.
9. QUEVEDO, G. y RECAREY, C. (2005) "Modelación Estocástica y Teoría de Seguridad en el estudio de conexiones de estructuras mixtas", Universidad Politécnica de Cataluña, 2005.
10. RIPLEY, B. D. (1987) *Stochastic Simulation*, J. N.Y., Wiley and Sons.
11. SAROFIM, M. C. (2004) "Methods of Uncertainty Analysis" en *Lectures by Mort Webster and Ian Sue Wing*. Lectures 15.023, April 7th.
12. Ziha, K. (1995) "Descriptive sampling in Structural Safety" en *Structural Safety*. Vol. 17, pp. 33-41.