*Recommendations for the
basement wall analysis,
subjected to vertical loads
originated by the façade
pillars*

Recomendaciones para el análisis de muros de sótano, sometidos a cargas verticales originadas por pilares de fachada

Autores

PEÑA, A. Dr. Ingeniero por la Universidad Politécnica de Madrid
Profesor Auxiliar Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
e-mail: alvaro.pena@ucv.cl

CALAVERA, J. Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad
Politécnica de Madrid
Profesor Emérito UPM
Presidente de Honor de Intemac
e-mail: jcalavera@intemac.es

LLORENS, M. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad
Politécnica de Madrid
Director del Departamento de Estructuras de Edificación, Acciona
Infraestructuras
e-mail: mllorens@acciona.es

Fecha de recepción 1/3/2011

Fecha de aceptación 25/7/2011

Resumen

En el proyecto de los muros de sótano de los edificios suele ser usual justificar tan solo las armaduras verticales del trasdós y del intradós, mediante el cálculo elástico de los esfuerzos generados por la acción de los empujes de tierras, sobrecargas externas y empujes de agua exteriores al edificio.

El análisis de los muros en su plano longitudinal, recogiendo las cargas en su coronación y transmitiéndolas al terreno a través de la cimentación del muro, no suele ser apenas tratado en la literatura técnica y consecuentemente tampoco suele figurar en los anejos de cálculo de los proyectos.

Otro tanto puede decirse del efecto local del apoyo de los pilares en los muros y de la interacción en función de las rigideces respectivas de los distintos elementos que intervienen en el problema, como son la superestructura, el muro de sótano, el cimiento y el terreno, efectos que tampoco suelen ser considerados específicamente en los cálculos.

Palabras clave: Muros, cargas, pilares

Todos estos tipos de análisis pueden dar lugar a armaduras suplementarias no contempladas en los proyectos, siendo las armaduras de retracción y temperatura, dispuestas por otros motivos, las que deben encargarse en la realidad de absorber parte de estos esfuerzos no analizados convencionalmente en los proyectos.

Con objeto de llenar este vacío existente para el diseño de los muros de sótano, se ha planteado, pues, esta investigación, que ha constituido la tesis doctoral de D. ÁLVARO PEÑA FRITZ (14), en la que el profesor D. JOSÉ CALAVERA RUIZ ha sido su Director y D. MANUEL LLORENS ALCON ha actuado como asesor, analizando la sensibilidad de dichos muros frente a la variación de las rigideces respectivas de la superestructura, del muro de sótano y del terreno, tratando de obtener tablas y recomendaciones prácticas para la determinación de las armaduras suplementarias necesarias por estos conceptos.

Abstract

In projects pertaining to basement walls in buildings, justification of only vertical batter and soffit reinforcements is quite habitual, the same by way of elastic calculation of the efforts generated by the soil's thrust action, external overloads and exterior water thrust to the building.

Analysis of the walls along their longitudinal plane, collecting loads at coronation and transmitting these to the soil through wall foundations, is hardly covered in technical literature and as a consequence the same does not appear in the calculation annexes of the projects.

This is likewise the case with the local support effect of the pillars over the walls and interaction in accordance to the rigidity with regards to the different elements intervening in the problem, as is the case with the superstructure, basement wall, foundations and terrain, effects that are likewise not taken specifically into consideration in the calculations.

Keywords: Wall, Loads, Pillars

All these analysis may give rise to supplementary reinforcement that is not contemplated in the projects, resulting in retraction and temperature reinforcement that is arranged for other reasons actually being in charge of absorbing these efforts that are not conventionally analysed in the projects.

Thus this investigation has been put forward with the idea of covering the void that exists in the design of basement walls, the same constituting Mr. ALVARO PEÑA FRITZ' doctoral thesis (14), in which Professor JOSE CALAVERA RUIZ has been his Director and Mr. MANUEL LLORENS ALCON has acted as the counsellor, analysing the sensitivity of said walls in view of variation in the respective rigidity of the superstructure, basement wall and terrain, attempting to obtain practical tables and recommendations in order to determine the supplementary reinforcements that are necessary for these concepts

Introducción

En cualquier tipo de obra civil intervienen tres elementos que resultan fundamentales para el buen comportamiento de la obra, como son la superestructura, la cimentación y el terreno, siendo este último el que suele ser el más deformable de los tres. Como consecuencia de la acción ejercida por el cimiento, se generan en el terreno tensiones y deformaciones que inducen a su vez otras en la superestructura, las cuales deben quedar dentro de los límites tolerables para garantizar un buen funcionamiento del edificio.

En el caso de los muros de los sótanos, la superestructura está constituida por el propio muro y por el entramado de vigas y pilares que se apoyan sobre él. A su vez el muro de sótano y su cimiento son los encargados de transferir al terreno las cargas del edificio y actúan por tanto como elementos de transmisión de acciones y reacciones entre estructura y terreno. En general, y debido al pequeño valor del canto de la zapata con relación a la altura del muro y a su trabajo como conjunto monolítico, la rigidez del cimiento como elemento independiente no influye a efectos prácticos en la generación de esfuerzos en el plano longitudinal, interviniendo en el estudio de interacción el conjunto muro-cimiento con un canto total igual a la altura del muro más el canto de la zapata. Por otra parte, los muros de los sótanos son una parte de la estructura de los edificios que, por estar enterrada y en contacto con el terreno, se encuentra solicitada a muy distintos tipos de acciones.

Objetivo de la investigación

- Analizar los distintos procedimientos y métodos de cálculo existentes para el caso de un muro de sótano que recibe en su coronación las cargas verticales de los pilares de fachada.
- Estudiar y cuantificar la sensibilidad de los distintos métodos de cálculo en función de las rigideces de la superestructura, cimentación y del terreno, determinando las combinaciones más desfavorables a efectos de los esfuerzos generados en el muro en su plano longitudinal.
- Analizar la influencia de la longitud de los muros en la generación de estos esfuerzos, considerando a estos efectos tres casos, con separaciones entre juntas de dilatación de 20, 40 y 100 metros.
- Estudiar localmente la influencia de la acción vertical de los pilares de fachada en los muros de

sótanos, considerando distintos procedimientos, para determinar las armaduras suplementarias a disponer en su coronación.

Deducir expresiones y recomendaciones prácticas que permitan estimar de una manera simplificada los esfuerzos longitudinales generados en el plano del muro, en función de las rigideces de la superestructura, cimiento y terreno.

Estudio de la Sensibilidad de los Muros de Sótano, en función de los Métodos de Cálculo y de las rigideces del Conjunto Superestructura-Muro de Sótano-Terreno.

En este capítulo estudiaremos la interacción del conjunto superestructura-muro de sótano-terreno, con relación a los métodos de cálculo existentes y a la variación de rigideces, que influyen directamente en el diseño de un muro de sótano como viga de cimentación.

Para la aplicación de este estudio hemos considerado una superestructura que represente a un edificio de 10 plantas, con una separación de pilares de 5 m y una altura entre plantas de 3 m. Para analizar la influencia de rigidez de la superestructura en el estudio, se han adoptado cuatro tipos de estructuras, desde vigas de 2 m de canto y pilares de 0,50 * 0,50 (simulando una superestructura muy rígida) a vigas planas de 0,25 m de canto y pilares de 0,30 * 0,30 (simulando una superestructura muy flexible).

En el presente estudio no se ha considerado la existencia en los extremos de los muros perpendiculares que usualmente conforman el perímetro del sótano, que modificarían los esfuerzos generados en los vanos extremos, proporcionando una continuidad que no presenta el modelo estudiado y que sí existe evidentemente en la realidad. A estos efectos el análisis realizado proporciona una información más precisa para los vanos interiores.

Las acciones tipo consideradas a efectos de cargas para la superestructura son las siguientes:

- Peso propio del forjado: 250 kg/m²
- Pavimento: 100 kg/m²
- Sobrecarga de uso: 200 kg/m²
- Sobrecarga de tabiquería: 100 kg/m²
- Carga total en cimentación: 650 kg/m²

Fachada: Se considera una fachada de tipo pesado (piezas prefabricadas de hormigón p.e) con una carga de 1,2 ton/m.

Los casos de superestructura analizados son:

- **Rigidez Superestructura Caso 1**
Vigas: 0,25 * 2,0 m (ancho x canto)
Pilares: 0,5 * 0,5 m
- **Rigidez Superestructura Caso 2**
Vigas: 0,25 * 1,0 m
Pilares: 0,4 * 0,4 m
- **Rigidez Superestructura Caso 3**
Vigas: 0,25 * 0,6 m
Pilares: 0,35 * 0,35 m
- **Rigidez Superestructura Caso 4**
Vigas: 0,40 * 0,25 m
Pilares: 0,3 * 0,3 m

No se han considerado los pesos propios de las vigas y pilares, para que estos no afecten a la distribución de presiones del terreno y sea solo su rigidez el factor a sensibilizar.

Las características del hormigón adoptadas, se definen de acuerdo a la Instrucción Española de Hormigón Estructural EHE.

- Resistencia característica de proyecto (f_{ck}):

25 MPa

- Modulo de elasticidad secante E_j :

$$8500 \cdot \sqrt[3]{f_{cm,j}}$$

donde se adoptará que $f_{cm} = f_{ck} + 8$ en N/mm^2

- Coeficiente de Poisson (ν): 0,2

Densidad (γ): 2,5 t/m³

Para el cálculo de secciones sometidas a solicitaciones normales, en los Estados Límite Últimos, se adoptará el diagrama parábola rectángulo recomendado por la Instrucción EHE (12):

Figura 1 Diagrama de cálculo parábola-rectángulo

La cimentación considerada en el estudio, se compone de dos elementos:

a) Zapata

Esta tendrá siempre las mismas dimensiones, y será de 0,60 m de canto y 1,5 m de ancho en toda la longitud del muro. Las características de los materiales son similares a las de la superestructura.

b) Muro de sótano

El muro de sótano sirve de enlace entre la superestructura y la cimentación, proporcionando a la cimentación una gran rigidez en el plano del mismo.

En la actualidad, las distintas normativas que se refieren al cálculo y dimensionamiento de las estructuras de edificación, suelen establecer límites entre 40 a 50 m entre juntas de dilatación, para que no sea necesaria la consideración del efecto de retracción y temperatura en el cálculo estructural.

De esta forma suele ser usual la disposición de juntas de dilatación en las estructuras de edificios en zonas de grandes cambios térmicos a distancias entre 20 y 25 m.

Por otra parte existe la tendencia actual de que en los edificios que poseen grandes superficies en las plantas de los sótanos, se construyan los forjados sin ningún tipo de juntas, con objeto de evitar el tratamiento especial de las juntas intermedias y un mejor comportamiento de los forjados en la transmisión de los empujes de tierras de uno al otro lado del edificio. Así se proyectan actualmente edificios con distancias entre juntas de 100 m o mayores.

Con objeto de analizar la influencia de la separación de las juntas de dilatación en los esfuerzos generados en el muro, se han considerado en este estudio tres tipos de longitudes de muros de sótano, correspondientes a 20 m, 40 m y 100 m.

Para todos los casos se considera un muro de un solo sótano, con una altura de 3,0 m y ancho de 0,30 m (ver Figura 2) y unas características de los materiales similares a las de la superestructura.

El terreno de cimentación y la consideración de las distintas respuestas posibles del mismo bajo la acción de las cargas de la estructura, a través de la cimentación, condicionan los esfuerzos generados en el muro de sótano y la superestructura, esfuerzos que servirán para calcular las armaduras suplementarias a disponer en el muro.

Figura 2 Cimentación adoptada. Zapata de 0,60 x 1,50 m y muro de sótano de sección 3,00 x 0,30 m de longitudes de 20 m, 40 m y 100 m y con separación de pilares de 5 m.

Para estudiar las distintas hipótesis del conjunto superestructura-cimentación-terreno, hemos considerado diferentes modelos, en función de la interacción terreno-estructura, concretándose el estudio para los casos que se exponen a continuación.

Análisis bidimensional de los muros de sótano por elementos finitos y respuesta del terreno según el Método de Winkler.

Para determinar el comportamiento del conjunto superestructura-cimiento-terreno, se ha considerado un modelo bidimensional, con los siguientes criterios:

- Se ha supuesto que la superestructura se rige por un modelo elástico y lineal, basado en la teoría de los elementos finitos.
- El muro de sótano corresponde a una viga de cimentación de 0,30 x 3,0 m (ancho x canto), con unas características del hormigón similares a las de la superestructura.

Para el caso del terreno, en lugar de suponer un medio homogéneo e isótropo con parámetros E y ν , como en el espacio elástico de Boussinesq, se supone un modelo, denominado espacio de Winkler, en el que los asientos son proporcionales a la presión aplicada en cada punto, discretizando un muelle cada metro a lo largo de la longitud del muro, suponiendo que los muelles solo pueden trabajar a compresión, al considerar que el terreno no admite tracciones. La constante de proporcionalidad de los muelles se deduce en función del coeficiente de balasto y del área de la zapata representada por cada uno de ellos. (Constante del muelle = Coeficiente de Balasto (k) * el área tributaria (A) de la zapata).

El estudio se ha realizado, considerando tres tipos de terrenos:

- Terreno blando: En el caso de suelos medianamente deformables.
- Terreno medio : Para suelos "normales" que admitan de 2 a 3 kg/cm² de presión admisible.
- Terreno duro: Para suelos con deformaciones prácticamente despreciables.

Para definir los coeficientes de balasto en cada caso, se han utilizado distintas tablas y recomendaciones existentes en la bibliografía (8), (13), (15), (17) y (18), considerando finalmente los siguientes valores:

- Coeficiente de Balasto del terreno blando: 2.300 t/m³
- Coeficiente de Balasto terreno medio: 3.500 t/m³
- Coeficiente de Balasto terreno duro: 100.000 t/m³

Para analizar los distintos casos estudiados, se ha utilizado el programa comercial de cálculo basado en la teoría de elementos finitos SAP2000 Versión 8.36

Análisis tridimensional de los muros de sótano, mediante el método de los elementos finitos.

Para determinar el comportamiento del conjunto superestructura-cimiento-terreno de la forma más precisa posible, hemos considerado un modelo tridimensional, considerando los siguientes criterios:

- Se ha supuesto que la superestructura se rige por un modelo no lineal basado en la teoría de los elementos finitos, donde el comportamiento del hormigón corresponde al método parábola-rectángulo.
- El muro de sótano corresponde a una viga de cimentación de 0,30 x 3,0 m, con los mismos supuestos de rigidez y características no lineales que la superestructura.
- La zapata adopta las dimensiones señaladas anteriormente, añadiendo en su comportamiento tenso-deformacional, la propiedad no lineal de contacto basado en el rozamiento zapata-terreno.

El terreno se modeliza discretizándolo en elementos finitos, definiendo sus propiedades tenso deformacionales y un modelo no lineal, mecánico y de contacto, para analizar factores específicos como la consideración de asientos totales y diferenciales, la plastificación en el terreno y la posible plastificación en el contacto de la zapata con el terreno.

Las propiedades y parámetros del terreno adecuados a los diferentes tipos de terrenos son las siguientes:

Terreno Blando:

- Módulo de deformación (E): 1.000 t/m²
- Coeficiente de Poisson (ν): 0,35
- Peso específico aparente (γ): 1,85 t/m³
- Cohesión efectiva (c'): 2 t/m²
- Ángulo de rozamiento interno efectivo (ϕ'): 24°

Terreno Medio:

- Módulo de deformación (E): 3.500 t/m²
- Coeficiente de Poisson (ν): 0,3
- Peso específico aparente (γ): 1,9 t/m³
- Cohesión efectiva (c'): 0,5 t/m²
- Ángulo de rozamiento interno efectivo (ϕ'): 33°

Terreno Duro:

- Módulo de deformación (E): 100.000 t/m²
- Coeficiente de Poisson (ν): 0,25
- Peso específico aparente (γ): 2,3 t/m³
- Cohesión efectiva (c'): 10 t/m²
- Ángulo de rozamiento interno efectivo (ϕ'): 42°

El coeficiente de rozamiento terreno-cimiento (μ) está en relación directa con la resistencia al corte del terreno, que, despreciando la adherencia entre suelo y cimiento, depende del ángulo de rozamiento interno de las partículas (ϕ') y de la rugosidad del propio cimiento, pudiendo caracterizar a (μ) como la tangente del ángulo de rozamiento entre el cimiento y el terreno, que puede oscilar entre $1/3 \text{ tg}(\phi')$ y $\text{tg}(\phi')$. En nuestro estudio se ha considerado el valor de μ igual a la tangente de (ϕ').

Para analizar los distintos casos estudiados, se han utilizado dos programas comerciales de cálculo basados en la teoría de elementos finitos ANSYS Versión 6.0 Y PLAXIS 3D Versión 1.0

Estudio de la interacción Superestructura-Muro de Sótano-Terreno, en función de los métodos de cálculo y de las rigideces del conjunto superestructura-muro de Sótano-Terreno.

Como ya se ha mencionado en los apartados anteriores, existen diversos métodos para el diseño de muros de sótano bajo la acción vertical de los pilares de fachada. Para nuestro estudio hemos adoptado los tres métodos siguientes que tratan de abarcar las distintas consideraciones contempladas:

- Análisis bidimensional, con una distribución de presiones del terreno basada en el método de Winkler.
- Análisis tridimensional, con una distribución de presiones basada en la teoría de los elementos finitos.

El estudio ha considerado la combinación de las situaciones más desfavorables posibles, en función de las siguientes variables:

- La variación de rigideces en la superestructura (caso 1, caso 2, caso 3 y caso 4).
- La variación de la longitud del muro de sótano (20 m, 40 m y 100 m).
- La variación de rigideces del terreno (terreno blando, terreno medio y terreno duro).

Los criterios de signos de los momentos flectores adoptados en este estudio se corresponden con la referencia (2), según la cual los momentos situados por encima de la línea de referencia de ordenada "0" exigen armaduras de tracción en la cara inferior del muro y los situados por debajo la exigen en la parte superior del mismo, tal y como se indica en los esquemas adjuntos. Igualmente para la ley de cortantes el criterio es el indicado en las Figuras 5a y 5b.

Figura 5 a)

Figura 5 b)

Comparación de los esfuerzos generados en un Muro de Sótano de longitud 20 m, en función de los métodos de cálculo y la variación de rigideces en la superestructura y el terreno.

Comparación de los esfuerzos generados en un Muro de Sótano de longitud 40 m, en función de los métodos de cálculo y la variación de rigideces en la superestructura y el terreno.

Comparación de los esfuerzos generados en un Muro de Sótano de longitud 100 m, en función de los métodos de cálculo y la variación de rigideces en la superestructura y el terreno.

Del estudio realizado, se pueden extraer las conclusiones más significativas siguientes:

1) En el método como cuerpo rígido la ley de momentos flectores resultante en los distintos casos estudiados, resulta muy diferente de la obtenida con los otros dos métodos, incluso invirtiéndose de signo (exigiendo armaduras en la parte superior del muro en lugar de la inferior en la vertical de los pilares). Este resultado confirma la no idoneidad del método para el caso de que los pilares de esquina tengan cargas mayores que las reacciones hiperestáticas que les corresponderían en el caso de que se estudiase el muro como viga continua apoyada en los pilares. Como se ha comentado anteriormente esta imprecisión se podría corregir considerando en el estudio global la presencia de los muros perpendiculares que parten de las esquinas, o bien, de modo aproximado, deduciendo de la carga de los pilares de esquina la parte de carga que previsiblemente se transmitiría al terreno a través de la cimentación de los muros perpendiculares.

Los resultados obtenidos para las longitudes de muros de 40 y 100 metros deforman todavía más resultados en comparación con los otros dos métodos, por lo que a nuestro juicio y dadas las herramientas de cálculo actuales, este método debe ser utilizado con muchas reservas.

Tampoco con este método se puede obtener ninguna información válida relativa a la deformación de la estructura en el sentido longitudinal del muro de sótano.

2) Contrastando los resultados obtenidos con el método basado en el modelo de Winkler, con los obtenidos con los métodos basados en la teoría de los elementos finitos, podemos observar que aumentan las diferencias entre dichos resultados a medida que el suelo se considera más deformable.

La razón hay que buscarla en que el primer método se basa en un cálculo elástico en el que el estudio del equilibrio de la interacción terreno-estructura se realiza comparando exclusivamente la rigidez estructural del muro de sótano y la de la superestructura, alejándose del modelo, más realista, en el que también se tienen en cuenta las características del terreno.

Además en los modelos basados en los elementos finitos se tienen en cuenta las posibles plastificaciones de las zonas de terreno donde se supera la resistencia al corte del mismo, sobre todo en terrenos de baja consistencia o en los que no posean cohesión, circunstancia que no se tiene en cuenta en el método basado en el modelo de Winkler.

3) Con relación a los asentamientos producidos en el terreno por la acción de las cargas de la superestructura, el único método que proporciona valores que puedan considerarse razonables, es el basado en una respuesta del terreno a través de elementos finitos, que utiliza un espacio elástico de Boussinesq, con la posibilidad de que aparezcan zonas plásticas cuando las sollicitaciones alcancen valores que sobrepasen la capacidad resistente del terreno a esfuerzo cortante.

Esta característica del método, hace que se puedan observar diferencias de hasta el 50% entre el método de Winkler y el de los elementos finitos, ya que los muelles tienen un comportamiento lineal en la relación carga/asiento, sin importar la resistencia al corte del terreno, no considerando por otra parte en los bordes que exista ningún otro terreno por fuera de la cimentación, lo que evidentemente reduce la precisión del estudio en los extremos del muro de sótano.

4) Finalmente existe otra circunstancia a favor del método de elementos finitos, tal y como se ha considerado en este estudio, y es el hecho del efecto tridimensional en el sentido perpendicular al plano del muro de sótano, el cual ayuda al reparto de presiones en esa dirección, efecto que aunque resulta poco importante a efectos prácticos, es el más representativo de la realidad.

Estudio de la interacción superestructura-muro de sótano-terreno, en función de las rigideces respectivas, según el método basado en la teoría de los elementos finitos.

Según hemos comentado en los capítulos anteriores, se puede concluir que el modelo tridimensional de elementos finitos es el método que estudia de la forma más completa posible el problema de interacción planteado, considerando por ejemplo: el comportamiento no lineal de las estructuras, la distribución de presiones del terreno que más se ajusta a la realidad, etc.

Debido a esto, nos hemos basado exclusivamente en este método para analizar la influencia de los distintos factores considerados en los esfuerzos resultantes en un muro de sótano calculado como viga longitudinal.

Resumimos a continuación los valores resultantes para las distintas combinaciones analizadas.

Comparación de los esfuerzos resultantes en un Muro de Sótano de longitud 20 m y terreno blando, en función de la variación de rigideces en la superestructura.

Comparación de los esfuerzos resultantes en un Muro de Sótano de longitud 20 m y terreno duro, en función de la variación de rigideces en la superestructura.

Comparación de los esfuerzos resultantes en un Muro de Sótano de longitud 40 m y terreno Medio, en función de la variación de rigideces en la superestructura.

Comparación de los esfuerzos resultantes en un Muro de Sótano de rigidez en la superestructura caso 1 y terreno blando, en función de la variación de longitud.

Comparación de los esfuerzos resultantes en un Muro de Sótano de longitud 20 m y rigidez en la superestructura caso 2, en función de la variación de rigidez del terreno.

Del análisis de los resultados obtenidos con las distintas combinaciones de variaciones de rigidez del conjunto superestructura-cimentación-terreno, con el método basado en una respuesta no lineal del terreno mediante la teoría de los elementos finitos, hemos extraído las conclusiones que se indican a continuación, en las que nos basaremos para proponer una serie de recomendaciones de carácter práctico, que puedan ayudar a los proyectistas a estimar de forma sencilla

las armaduras suplementarias a disponer para absorber los esfuerzos de flexión longitudinal que pueden aparecer en los muros de los sótanos y que no suelen ser tenidas en cuenta en los proyectos.

En los terrenos duros, las presiones sobre el terreno se concentran más próximas a los ejes de los pilares, alejándose de las leyes de presiones del reparto uniforme. Debido a esto, los esfuerzos de flexión longitudinal que se generan en el muro son relativamente independientes del resto de las variables (longitud del muro de sótano y rigidez de la superestructura) y por lo tanto los resultados obtenidos para las distintas combinaciones no presentan variaciones importantes.

A medida que el terreno posee menos consistencia (terrenos medios y blandos), la gran rigidez del muro de sótano (en comparación con la del terreno), es capaz de repartir las presiones a lo largo de este, trasladando incluso parte de la carga de los pilares centrales a los extremos, produciéndose pues una variación de esfuerzos mucho más significativa. De esta forma, a medida que los muros de sótano van aumentando de longitud, los momentos flectores de los vanos más cercanos a los extremos, van aumentando en función de la rigidez de la superestructura.

Finalmente, queremos destacar el hecho de que las armaduras suplementarias que recomendaremos a continuación no deben ser contempladas con la misma responsabilidad estructural que las obtenidas, por ejemplo, con los cálculos a flexión de las vigas, ya que en estas la no disposición de las armaduras de cálculo pueden conducir al colapso de las mismas, mientras que en los muros de sótano los mecanismos de transmisión de las cargas al terreno pueden ser "reacomodados" por el propio muro, aun en el caso de que, por defecto en la disposición de las armaduras suplementarias, se produzca alguna fisuración en el borde superior del muro o en la cara inferior de la zapata, no deseables, pero no trascendentales para la estabilidad del conjunto.

Esto justifica a nuestro juicio, el que a pesar de no haberse contemplado habitualmente en los proyectos los esfuerzos longitudinales generados en los muros, sí que hayan sido "resistidos", al menos parcialmente, por las armaduras horizontales exigidas por las distintas normativas de diseño existentes, por razones de retracción y temperatura y por las armaduras dispuestas "por la buena práctica" en la coronación del muro.

Tablas para la determinación de los esfuerzos de flexión longitudinal de los muros de sótano en función de las rigideces del conjunto superestructura-muro de sótano-terreno.

A continuación y como resumen del estudio realizado para las tres longitudes de muros, hemos confeccionado tres tablas con los coeficientes multiplicadores del momento isostático del vano $q \cdot l^2/8$, que nos permiten obtener los momentos de diseño del muro para la determinación de las armaduras superiores e inferiores, para la combinación de las distintas rigideces consideradas para el conjunto superestructura (caso 1, caso 2, caso 3 y caso 4), muro de sótano (longitud 20 m, 40 m y 100 m) y terreno (blando, medio y duro).

Figura 6

Tabla 1 Longitud de muro 20 m

TIPO DE TERRENO	CASOS DE RIGIDECES EN SUPERESTRUCTURA							
	CASO 1		CASO 2		CASO 3		CASO 4	
	K Armadura inferior	K Armadura superior	K Armadura inferior	K Armadura superior	K Armadura inferior	K Armadura superior	K Armadura inferior	K Armadura superior
TERRENO BLANDO	0,877	0,668	1,020	0,623	1,096	0,601	1,168	0,582
TERRENO MEDIO	0,816	0,642	0,889	0,612	0,925	0,593	0,957	0,574
TERRENO DURO	0,647	0,593	0,652	0,579	0,654	0,571	0,655	0,563

Tabla 2 Longitud de muro 40 m

TIPO DE TERRENO	CASOS DE RIGIDECES EN SUPERESTRUCTURA							
	CASO 1		CASO 2		CASO 3		CASO 4	
	K Armadura inferior	K Armadura superior	K Armadura inferior	K Armadura superior	K Armadura inferior	K Armadura superior	K Armadura inferior	K Armadura superior
TERRENO BLANDO	0,716	0,770	0,837	0,703	1,028	0,621	1,114	0,591
TERRENO MEDIO	0,671	0,729	0,722	0,657	0,774	0,585	0,825	0,553
TERRENO DURO	0,572	0,593	0,574	0,591	0,577	0,562	0,581	0,527

Tabla 3 Longitud de muro 100 m

TIPO DE TERRENO	CASOS DE RIGIDECES EN SUPERESTRUCTURA							
	CASO 1		CASO 2		CASO 3		CASO 4	
	K Armadura inferior	K Armadura superior	K Armadura inferior	K Armadura superior	K Armadura inferior	K Armadura superior	K Armadura inferior	K Armadura superior
TERRENO BLANDO	0,658	0,732	0,790	0,685	1,051	0,611	1,145	0,588
TERRENO MEDIO	0,641	0,687	0,703	0,640	0,757	0,588	0,803	0,531
TERRENO DURO	0,576	0,575	0,601	0,54	0,604	0,520	0,605	0,499

Método aproximado recomendado para la determinación de las armaduras suplementarias a disponer en los muros de sótano para absorber los momentos longitudinales generados.

Dado el carácter de armaduras complementarias a sumar a las que deban disponer por otras consideraciones, estimamos suficientemente preciso a efectos prácticos, el determinar la capacidad mecánica de estas armaduras dividiendo los momentos entre el brazo mecánico Z que regula la distancia entre las resultantes de tracción y compresión, localizadas en la parte superior del muro o en la parte inferior de la zapata, según sea el signo del momento. Es decir, consideramos que el par de fuerzas proporcionado por la capacidad resistente de las armaduras dispuestas y la del bloque de compresión equilibran los esfuerzos generados.

A semejanza del análisis de las vigas pared por el método de bielas y tirantes, proponemos las siguientes características geométricas de la sección resistente, indicadas en la Figura 7.

Figura 7 Sección resistente de un muro de sótano.

$$Z = h - \frac{h}{15} - \frac{h}{10} = \frac{5}{6}h$$

$$\text{Si } T_d = \frac{M_d}{Z} \rightarrow A_s = \frac{T_d}{f_{yd}}$$

Independientemente de que las armaduras longitudinales inferiores de la zapata se encuentren en general más cerca de su cara inferior, hemos considerado, a efectos de cálculo, que el centro de gravedad de la cabeza de tracción o de compresión en la parte inferior del muro (según sea el signo del momento), se encuentra a una separación de $h/15$ de la cara inferior de la zapata, siendo h la altura del muro.

Para cumplir con el estado límite de fisuración y limitar la abertura de fisura, proponemos limitar la tensión de trabajo del acero a $f_{yd} \leq 400 \text{ N/mm}^2$.

La armadura así calculada que deba disponerse en la parte superior del muro, proponemos distribuirla de la siguiente forma: un conjunto de 2 ó 3 redondos en su borde superior, de diámetros $\phi 16$ a $\phi 20$ en función de las características del muro, hasta un porcentaje del orden del 50% de las obtenidas con los cálculos (ver capítulo 4), disponiendo el otro 50% entre las dos caras laterales de la región A, que se deberían sumar a las armaduras horizontales del muro dispuestas por consideraciones de retracción y temperatura. Si las armaduras suplementarias necesarias por cálculo resultan poco importantes, por ejemplo inferiores a $2\phi 16$, se podrían disponer exclusivamente en el borde superior del muro, dejando en las caras laterales, incluso en la región A, las dispuestas por consideraciones de retracción y temperatura.

Las armaduras a disponer en la región B, para el caso en que resulten necesarias, se añadirían en principio a las armaduras de reparto dispuestas por motivos estructurales en la cara inferior de la zapata, quedando no obstante a criterio del proyectista, en función de las características de cada caso concreto, si deben ser suplementarias o bien pueden ser aprovechadas dichas armaduras de reparto en el cómputo de la sección total de armaduras a disponer, al menos parcialmente.

Figura 8

Efecto de las cargas locales sobre un muro de sótano

En los puntos anteriores, hemos analizado los esfuerzos originados por las acciones de la superestructura en el plano longitudinal de un muro de sótano.

En este apartado, estudiaremos el efecto local de las cargas de los pilares sobre la coronación del muro, que pueden generar tensiones de tracción no analizadas generalmente en los cálculos y que, en función de las características del problema, puedan aconsejar la disposición de armaduras suplementarias en las proximidades de la base de los pilares.

Procedimientos para determinar las tensiones producidas por las cargas localizadas

Al igual que en las vigas pared, o en el análisis de las cargas concentradas sobre macizos, las tensiones generadas por las cargas de los pilares sobre la coronación de los muros de sótano se desarrollan sin que se cumplan las hipótesis de Bernoulli-Navier, o de Kirchhoff, de mantenimiento de las secciones planas durante la aplicación de los esfuerzos, con una distribución de tensiones σ_x no lineal y sin que sea posible despreciar las tensiones σ_y y τ_{xy} , siendo necesario por tanto realizar el análisis determinando todas las condiciones de equilibrio y de compatibilidad de los esfuerzos internos.

Los métodos utilizados normalmente para realizar un análisis del efecto de cargas concentradas en condiciones similares a las de este estudio, se podrían resumir en los siguientes:

- Métodos basados en estudios teóricos.
- Métodos basados en la fotoelasticidad.
- Métodos basados en la realización de ensayos a escala real en el laboratorio.
- Métodos basados en el análisis con elementos finitos.
- Métodos basados en esquemas resistentes aproximados, como el de las bielas y tirantes.

En el presente trabajo vamos a analizar el efecto de las cargas de los pilares en la coronación de los muros de sótano, con los dos últimos métodos, tratando de obtener algunas recomendaciones de índole práctica que permitan estimar las armaduras suplementarias a disponer en la parte superior de los muros, para absorber convenientemente las tensiones de tracción generadas.

Recomendaciones de armado para la acción de cargas verticales sobre un muro de sótano

Las investigaciones realizadas sobre este tema para el caso de vigas pared y elementos de hormigón armado de gran canto, son numerosas y las recomendaciones sobre la cuantía de armaduras necesarias y su disposición más conveniente, suelen venir recogidas en las Normas e Instrucciones relativas a elementos de hormigón armado de los distintos países. No ocurre lo mismo para los muros de sótano, para los que las investigaciones realizadas son escasas y las pocas recomendaciones que pueden encontrarse, suelen resultar conservadoras.

Estudio basado en el análisis con elementos finitos

Para analizar la distribución de tensiones generadas por la acción de las cargas de los pilares en la coronación de un muro de sótano, se ha modelizado el muro tipo y el terreno sobre el que se apoya, discretizándolos en el conjunto de elementos representado en la Figura 9, visualizando la trayectoria de las tensiones principales a lo largo del muro, verticales y horizontales, como se indica en el esquema de tensiones de la misma figura.

Figura 9

Figura 10 Distribución de tensiones verticales para el pilar intermedio..

Figura 9

Figura 11 Distribución de tensiones verticales para el pilar extremo.

Para el análisis de la distribución de las tensiones verticales de compresión se ha dividido longitudinalmente el muro en dos zonas, correspondiendo la de la Figura 10 a las producidas bajo los pilares interiores y la Figura 11 a las producidas bajo los pilares extremos.

La distribución de las tensiones horizontales producidas bajo los pilares intermedios, de tracción y de compresión, se reflejan en la Figura 12.

Figura 12 Distribución horizontal de tensiones para el pilar intermedio.

Del análisis de las tensiones generadas puede concluirse que, como resultaba previsible, las tensiones verticales de compresión, que vienen canalizadas por el fuste del pilar, se disipan gradualmente a lo largo del muro, reduciéndose rápidamente a niveles de tensiones muy moderados, sin que sea por tanto necesario ningún tipo de refuerzo por motivo de las cargas concentradas de los pilares, siempre que en el diseño de estos se hayan cumplido las recomendaciones de las Normas correspondientes. Las armaduras verticales de los pilares deben anclarse suficientemente en el muro sin que por efecto de las cargas verticales resulte necesaria su prolongación hasta la zapata, a no ser que la dimensión del pilar imponga una mocheta fuera del plano del muro, o el valor de las cargas del pilar, o el estudio de flexión transversal, exijan otros suplementos de armaduras.

El análisis de las tensiones horizontales en el plano del muro permite apreciar que, para las condiciones consideradas en este estudio, que pueden considerarse como típicas para edificios normales, las máximas tensiones de tracción generadas son muy moderadas, del orden de 6 kg/cm² y localizadas en el borde superior del muro en la zona del vano entre pilares, o a una cierta profundidad bajo los pilares. Inmediatamente por debajo de la base de los pilares las tensiones horizontales producidas resultan de compresión, con valores máximos del orden de 30 kg/cm². Este resultado parece justificar el hecho de que no sea habitual la presencia de fisuraciones en la coronación de los muros por este fenómeno, a pesar de no ser habitual la disposición de armaduras suplementarias a estos efectos. Es decir que para los valores de cargas y dimensiones usuales

considerados en este estudio, las recomendaciones de "buena práctica" de disponer dos o tres redondos por la coronación del muro, conjuntamente con las armaduras horizontales del muro dispuestas por razones de retracción y temperatura, resultan suficientes para la absorción de las tensiones producidas por las cargas localizadas. Únicamente para el caso de edificios singulares, o pilares con grandes cargas, sería aconsejable la disposición de una cuantía mayor de armaduras, sin que su ausencia pueda provocar, en general, situaciones de grave riesgo estructural para el edificio, sino, en todo caso provocar la aparición de algunas fisuras en la parte superior del muro.

Método Simplificado

A estos efectos resulta interesante comentar las observaciones según CALAVERA, J. (2), donde en la zona superior de un muro, se producen compresiones horizontales por debajo de los pilares y a una cierta profundidad tracciones horizontales, según se refleja en la Figura 13.

Figura 13 Tomada de Cálculo de Estructuras de Cimentación, 4ª edición - J. Calavera)

Simplificadamente, la resultante de estas tracciones, se puede evaluar con la siguiente fórmula:

$$T = 0,3 \cdot N_d \left(1 - \frac{d}{L_2} \right)$$

Siendo L_2 la mayor de las luces contiguas al pilar considerado y "d" su dimensión en el sentido longitudinal del muro, debiendo disponerse, pues, una cuantía de armadura distribuida uniformemente en la altura H del muro (o en un altura L_1 , si $L_1 < H$ y $L_1 \leq L_2$).

$$A_s \cdot f_{yd} = 0,3 \cdot N_d \left(1 - \frac{d}{L_2} \right)$$

En el apartado correspondiente a (3), se indica también que la armadura destinada a cubrir tensiones de retracción y temperatura puede ser utilizada simultáneamente para cualquier otro fin resistente, en particular para los estados límites últimos, en concordancia con los comentarios realizados anteriormente.

Así pues, independientemente de otras consideraciones, puede concluirse que, de acuerdo con las recomendaciones en (3) y de lo deducido de nuestro estudio, resulta recomendable disponer un par de barras en la coronación del muro, con objeto de controlar las fisuras de retracción y temperatura o posibles tracciones provocadas por las cargas locales de los pilares. El diámetro de estas barras, podría fijarse en relación con la altura del muro, según el criterio de la figura 14.

Figura 14 Recomendación para armaduras en la coronación del muro. (Tomada de Cálculo de Estructuras de Cimentación, 4ª edición - J. Calavera)

Método de bielas y tirantes aplicado a la acción de cargas verticales sobre un muro de sótano

El método de bielas y tirantes fue incorporado a la Instrucción de hormigón estructural EHE (12) y constituye un método simplificado de carácter práctico para el estudio de la transmisión de esfuerzos en determinadas zonas de los elementos armados, en las que resulta inadecuado el análisis convencional de piezas sometidas a flexión. Este método tuvo su primera aplicación en 1899 por el profesor Ritter, para el estudio en las proximidades de los apoyos de los elementos solicitados a flexión.

Fundamento teórico

El método de las bielas y tirantes es un procedimiento que permite el diseño de elementos de hormigón, lineales, superficiales o volumétricos. La estructura se idealiza mediante un sistema (plano o espacial) de barras biarticuladas, que intenta representar el comportamiento de la estructura o parte de ella.

Debido a que el método está basado en sistemas biarticulados, los elementos que los componen trabajan a tracción o compresión pura. En la nomenclatura clásica del método, los elementos comprimidos se denominan bielas, mientras que los elementos traccionados se denominan tirantes. Las zonas de unión entre bielas, entre tirantes, o entre bielas y tirantes, se denominan nudos.

Descripción del método

Para el proyecto y dimensionamiento de las estructuras de hormigón, las secciones a comprobar pueden dividirse a estos efectos en dos grandes grupos, que son, las regiones B, para las que se aceptan las hipótesis de Bernoulli-Navier o Kirchhoff, en las que las secciones planas normales a la directriz se mantienen planas al deformarse y por otro lado las regiones D (regiones de discontinuidad geométrica y esttica), en las cuales, debido al efecto de una carga puntual o concentrada, las tensiones inducidas por las cargas no responden a las hipótesis anteriormente mencionadas, sino que se desarrollan en forma de flujo, con una distribución tensional y de deformaciones compleja (ver Figura 14).

El efecto que produce la acción de las cargas verticales sobre un muro de sótano utilizando el método de bielas y tirantes, es un claro ejemplo de una región D, específicamente una discontinuidad generalizada (ver Figura 15).

Figura 15

Figura 15

Modelo adoptado

El modelo de bielas y tirantes adoptado para el estudio simultáneo de la flexión longitudinal y del efecto local de las cargas de los pilares en un muro de sótano, representa el flujo de fuerzas dentro de la estructura, el cual ha sido simplificado como una celosía de dos dimensiones, en la que se reproducen las resultantes de compresiones (bielas) y las tracciones en la armadura (tirantes).

Para aplicar el modelo de bielas y tirantes al caso que nos ocupa, hemos considerado una sección central con simetría a ambos lados, no considerando pues el caso de la zona del pilar de borde, que a estos efectos no sería representativa, ya que, como se ha comentado en apartados anteriores, no se tendría en cuenta el

efecto del muro perpendicular, que a efecto de reparto de presiones en el terreno y consiguientemente de la distribución de tensiones en el muro, se alejaría de la realidad.

En la Figura 16 se propone un criterio para la aplicación del método en el caso del muro tipo estudiado, que se debería revisar para el estudio de muros de características diferentes, teniendo siempre en cuenta el carácter aproximado del procedimiento.

Figura 16 Modelo de bielas y tirantes propuesta.

Con relación a la Figura 6.12, la armadura superior de los vanos intermedios, se puede determinar utilizando las recomendaciones de la Instrucción Española de Hormigón Estructural EHE, en la cual:

$$T_a = 0,08 \cdot p_d \cdot l = A_s \cdot f_{yd}$$

Y para el caso de la armadura a disponer para absorber las tensiones de tracción generadas a una cierta profundidad en el eje de los pilares:

$$T_b = 0,23 \cdot p_d \cdot l = A_s \cdot f_{yd}$$

Siendo:

- l = La distancia mayor entre eje de pilares.
- A_s = Área de la sección de armadura en tracción.
- f_{yd} = Límite elástico de cálculo del acero 400 N/mm²
- p_d = Presión media de las cargas de cálculo transmitidas por los pilares: []

Comprobación de nudos y bielas

La comprobación de nudos y bielas de acuerdo a la Instrucción de Hormigón Estructural EHE (12), se satisface si se comprueba la compresión localizada en apoyos.

$$\frac{R_{ed}}{a_e b_e} \leq f_{2cd} \quad \frac{R_{id}}{a_i b_i} \leq f_{2cd}$$

Siendo:

R_{ed} Reacción de cálculo en apoyo extremo.
 R_{id} Reacción de cálculo en apoyo interior.
 a_e, b_e Dimensiones del apoyo extremo (ver Figura 17).
 a_i, b_i Dimensiones del apoyo interior (ver Figura 18).
 f_{2cd} Resistencia a compresión del hormigón.

$$f_{2cd} = 0,70 f_{cd}$$

Figura 17

Figura 18

Conclusiones finales

A continuación se resumen las conclusiones más significativas:

1. Estudio del muro como viga longitudinal

- En el método como cuerpo rígido la ley de momentos flectores resultante en los distintos casos estudiados, resulta muy diferente de la obtenida con los otros dos métodos, incluso invirtiéndose de signo (exigiendo armaduras en la parte superior del muro en lugar de la inferior). Este resultado confirma la no idoneidad del método para el caso de que los pilares de esquina tengan cargas mayores que las reacciones hiperestáticas que les corresponderían en el caso de que se estudiase el muro como viga continua apoyada en los pilares. Como se ha comentado anteriormente esta imprecisión se podría corregir considerando en el estudio global la presencia de los muros perpendiculares que parten de las esquinas, o bien, de modo aproximado, deduciendo de la carga de los pilares de esquina la parte de carga que previsiblemente se transmitiría al terreno a través de la cimentación de los muros perpendiculares.
- Los resultados obtenidos para las longitudes de muros de 40 y 100 metros deforman todavía más resultados en comparación con los otros dos métodos, por lo que a nuestro juicio y dadas las herramientas de cálculo actuales, este método debe ser utilizado con muchas reservas.

Tampoco con este método se puede obtener ninguna información válida relativa a la deformación de la estructura en el sentido longitudinal del muro de sótano.

- Contrastando los resultados obtenidos con el método basado en el modelo de Winkler, con los obtenidos con los métodos basados en la teoría de los elementos finitos, podemos observar que aumentan las diferencias entre dichos resultados a medida que el suelo se considera más deformable.

La razón hay que buscarla en que el primer método se basa en un cálculo elástico en el que el estudio del equilibrio de la interacción terreno-estructura se realiza comparando exclusivamente la rigidez estructural del muro de sótano y la de la superestructura, alejándose del modelo, más realista, en el que también se tienen en cuenta las características del terreno.

Además, en los modelos basados en los elementos finitos se tienen en cuenta las posibles plastificaciones de las zonas de terreno donde se supera la resistencia al corte del mismo, sobre todo en terrenos de baja consistencia o en los que no posean cohesión, circunstancia que no se tiene en cuenta en el método basado en el modelo de Winkler.

- Con relación a los asentamientos producidos en el terreno por la acción de las cargas de la superestructura, el único método que proporciona valores que puedan considerarse razonables, es el basado en una respuesta del terreno a través de elementos finitos, que utiliza un espacio elástico de Boussinesq, con la posibilidad de que aparezcan zonas plásticas cuando las sollicitaciones alcancen valores que sobrepasen la capacidad resistente del terreno a esfuerzo cortante.

Esta característica del método, hace que se puedan observar diferencias de hasta el 50% entre el método de Winkler y el de los elementos finitos, ya que los muelles tienen un comportamiento lineal en la relación carga/asiento, sin importar las resistencias al corte del terreno, no considerando por otra parte en los bordes que exista ningún otro terreno por fuera de la cimentación, lo que evidentemente reduce la precisión del estudio en los extremos del muro de sótano.

- Finalmente existe otra circunstancia a favor del método de elementos finitos, tal y como se ha considerado en este estudio, y es el hecho del efecto tridimensional en el sentido perpendicular al plano del muro de sótano, el cual ayuda al reparto

de presiones en esa dirección, efecto que aunque resulta poco importante a efectos prácticos es el que resulta más representativo de la realidad.

2. Efecto local de las cargas de los pilares

Del análisis de las tensiones generadas puede concluirse que, como resultaba previsible, las tensiones verticales de compresión, que vienen canalizadas por el fuste del pilar, se disipan gradualmente, reduciéndose rápidamente a niveles de tensiones muy moderados, sin que sea por tanto necesario ningún tipo de refuerzo por motivo de las cargas concentradas de los pilares, siempre que en el diseño de estos se hayan cumplido las recomendaciones de las Normas correspondientes. Las armaduras verticales de los pilares deben anclarse suficientemente en el muro sin que por efecto de las cargas verticales resulte necesaria su prolongación hasta la zapata, a no ser que la dimensión del pilar imponga una mocheta fuera del plano del muro, o el valor de las cargas del pilar, o el estudio de flexión transversal, exijan otros suplementos de armaduras.

El análisis de las tensiones horizontales en el plano del muro permite apreciar que, para las condiciones consideradas en este estudio, que pueden considerarse como típicas para edificios normales, las máximas tensiones de tracción generadas son muy moderadas, del orden de 6 kg/cm² y localizadas en el borde superior del muro en la zona del vano entre pilares, o a una cierta profundidad bajo los pilares. En todos los casos, dichas tensiones son nulas cuando se alcanza una profundidad superior a 2/3 de la altura del muro.

Inmediatamente por debajo de la base de los pilares las tensiones horizontales producidas resultan de compresión, con valores máximos del orden de 30 kg/cm². Este resultado parece justificar el hecho de que no sea habitual la presencia de fisuraciones en la coronación de los muros por este fenómeno, a pesar de no ser habitual la disposición de armaduras suplementarias a estos efectos. Es decir que para los valores de cargas y dimensiones usuales considerados en este estudio, las recomendaciones de "buena práctica" de disponer dos o tres redondos por la coronación del muro, conjuntamente con las armaduras horizontales del muro dispuestas por razones de retracción y temperatura, resultan suficientes para la absorción de las tensiones producidas por las cargas localizadas. Únicamente para el caso de edificios singulares, o pilares con grandes cargas, sería aconsejable la disposición de una cuantía mayor de armaduras, sin que su ausencia pueda provocar, en general, situaciones de grave riesgo estructural para el edificio, sino, en todo caso provocar la aparición de algunas fisuras en la parte superior del muro.

Bibliografía.

1. CAFFARENA, J. "Estudio experimental de juntas de hormigonado". Tesis Doctoral Universidad Politécnica de Madrid, año 1986.
2. CALAVERA, J. "Cálculo de Estructuras de Cimentación", capítulos Nos 7 y 12, 4ª edición INTEMAC 2000.
3. CALAVERA, J. "Muros de Contención y Muros de Sótano". 3ª edición INTEMAC
4. DE BEER, E., LOUBERG, "Calcul de poutres reposant sur le sol par la méthode de la répartition parabolique". E. Annales des Travaux Publics de Belgique, 1964.
5. DUNCAN, J. M., AND CHANG, C. "Nonlinear analysis of stress and strain in soils, Y. Proc". ASCE 96 (1970) SM 5 S. 1629 bis 1653.
6. GIBSON, R.E. "Some results concerning displacements and stresses in a non – homogeneous elastic half-space". Géotechnique 17 (1967) S. 58-67.
7. JIMÉNEZ SALAS, J "Geotecnia y Cimientos parte I, II y III". Madrid, 1980.
8. KÖNIG, G Y SHERIF, G. "Consideración de las condiciones reales en el cálculo de vigas de cimentación,. Der Baingenieur 50 (1975).
9. LEVI, F.; MARRO, P. AND VIARA, G. "Non-linear Analysis of Beams and Frames". CEB Bulletin d'Information N° 227. August, 1995.
10. LLORENS, M. "Cimentaciones Flotantes". CEDEX, Madrid 2002.
11. LLORENS, M. "Muros de Sótano con zapatas excéntricas". Libro homenaje a José Antonio Jiménez Salas, Madrid 2000.
12. MINISTERIO DE FOMENTO. "Instrucción de Hormigón Estructural, EHE". España, edición 1999
13. MONNET, A (1994) "Module de Reaction, coefficient decompression, au sujet des paramètres utilisés dans la méthode de calcul elastoplastique des soutènements" Rev. Franc. De Geotech. N° 65 pag. 67-72
14. PEÑA FRITZ, A. "Proyecto de muros de sótano, sometidos a cargas verticales originadas por pilares de fachada". Tesis Doctoral dirigida por J. Calavera. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid, 2004.
15. TELLADO, M. "Interacción del Terreno, Cimiento y Estructura: El caso de las Zapatas (1ª y 2ª Parte)". Publicación del Depto. de Tecnología de la Construcción. Univ. de A Coruña.
16. TERZAGHI, K. "Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction". Geotechnique. Wiley and Sons.
17. VESIC, B. "Beams on elastic subgrade and the Winkler's hypothesis". ICSMFE, Paris 1961.
18. WINKLER, E. "Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit" Praga, 1867
19. ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. L. "El método de los elementos finitos", volumen 1 y 2. Formulación básica y problemas lineales y no lineales. Mc Graw Hill, 1994.
20. ZIMMERMANN, H. "Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues". Berlin, Ernst & Sohn 1930.