

CONDICIONES NECESARIAS PARA LA APLICACIÓN DEL MÉTODO DEL DISPARO A UN CONTROL ÓPTIMO DE POSICIÓN EN UN ROBOT MANIPULADOR

NECESSARY CONDITIONS FOR THE APPLICATION OF THE SHOOTING METHOD TO AN OPTIMAL CONTROL OF POSITION IN A MANIPULATING ROBOT

Jaime Estévez Carreón¹ Rubén Senén García Ramírez¹

Recibido el 2 de marzo de 2005, aceptado el 16 de septiembre de 2005
Received: March 2, 2005 Accepted: September 16, 2005

RESUMEN

El control óptimo de posición en el espacio de coordenadas de articulación en un robot manipulador está relacionado con la determinación de una ley de control que restringe al efector final del manipulador moverse a lo largo de una trayectoria dada, en un tiempo tan corto como sea posible. Su potencial de aplicación es particularmente importante en la generación de trayectorias óptimas de posición en robots manipuladores. Este trabajo propone una metodología alternativa de diseño, basada en el Máximo Principio de Pontryagin y las condiciones de recursividad necesarias para emplear el método del disparo en una trayectoria determinada. Dicha metodología es simulada en un robot manipulador de dos grados de libertad tipo planar.

Palabras clave: Máximo de Pontryagin, método del disparo, condiciones de recursividad.

ABSTRACT

The optimal control of position in the space of coordinates of joint in a manipulating robot, is related to the determination of a law of control that it restricts to the final effector of the manipulator to move throughout a given trajectory, in a as short time as it is possible. Its potential of application is particularly important in the generation of manipulating optimal trajectories of position in robots. This work proposes an alternative methodology of design, based in the Maximum Principle of Pontryagin and the recursion conditions necessary to use the shooting method in a certain trajectory. This methodology is simulated in a manipulating robot of two degrees of freedom type planar.

Keywords: Maximum of Pontryagin, shooting method, recursion conditions.

INTRODUCCIÓN

El control de posición determina la forma de cómo hallar la mejor regulación en la movilización de un robot manipulador de una posición a otra, dentro de su espacio de trabajo en de cierto tiempo [2], [3], [5], [7], [16], dicho control es empleado para realizar funciones repetitivas como es el traslado de piezas de un lugar a otro dentro de una línea de producción, la toma de vela de vidrio en hornos, pintado de automóviles, trayectorias de vuelo en aviones y satélites.

Una de las bondades del control óptimo es el poder determinar la “mejor” trayectoria óptima de entre

muchas, sujeta a ciertas restricciones inicial, final, de estado, o ley de control, para un determinado movimiento. Este método desarrollado inicialmente por Pontryagin [11] con su famoso Principio del Máximo, que proporciona las condiciones necesarias para la posible óptimalidad son analizadas mas recientemente por Vinter [14] y Piccolo [10], que profundizan en su análisis para hallar las trayectorias que satisfagan estas condiciones.

El control óptimo de posición está relacionado con la determinación de una ley de control (restricción), la cual deberá llevar el efector final del manipulador de una configuración inicial dada a una configuración deseada,

¹ Instituto Tecnológico de Puebla, Av. Tecnológico 420 Col. Maravillas Puebla 72210, México. jaimeestevz@itpuebla.edu.mx.

en un tiempo tan corto como sea posible [15] donde el punto inicial y final $[\mathbf{x}_0(\mathbf{t}), \mathbf{x}_f(\mathbf{T})]$, pueden ser ambos fijos o alguno de los dos libre, o con alguna restricción de estado.

Este artículo está organizado como sigue. En la sección **CONDICIONES DE ÓPTIMALIDAD** se dan las condiciones de optimalidad para hallar una trayectoria óptima, una revisión a la dinámica del robot manipulador y se enuncian los pasos del Máximo Principio de Pontryagin. En la sección **CONTROL ÓPTIMO DE POSICIÓN**, se plantea el diseño de un control óptimo de posición vía método recurvo del disparo; en la sección **EJEMPLO DE APLICACIÓN** se presentan un ejemplo de aplicación simulando un robot tipo planar. Finalmente se presentan las conclusiones.

CONDICIONES DE ÓPTIMALIDAD

En las condiciones necesarias de primer orden se asume que existe un control admisible $\mathbf{u}^*(\mathbf{t})$ el cual es óptimo, único y satisface las siguientes condiciones necesarias:

- a) Ecuaciones canónicas.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}^*(\mathbf{t}) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}(\mathbf{t})} \text{ ecuación de estado} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^*(\mathbf{t}) = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}(\mathbf{t})} \text{ ecuación de co-estado} \quad (2)$$

donde * denota optimalidad.

- b) Condiciones de frontera.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(\mathbf{t}_0) &= \mathbf{x}_0 \text{ es el estado inicial} \\ \mathbf{x}^*(\mathbf{T}) &\in \mathbf{S} \quad \mathbf{S} \text{ es el conjunto objetivo} \\ \mathbf{p}^*(\mathbf{T}) &\text{ es normal a } \mathbf{S} \text{ en } \mathbf{x}^*(\mathbf{T}). \end{aligned} \quad (3)$$

- c) Minimización del Hamiltoniano.

$$\mathbf{H}[\mathbf{x}^*(\mathbf{t}); \mathbf{p}^*(\mathbf{t}); \mathbf{u}^*(\mathbf{t})] \leq \mathbf{H}[\mathbf{x}^*(\mathbf{t}); \mathbf{p}^*(\mathbf{t}); \mathbf{u}^*(\mathbf{t})]$$

para $\mathbf{u}(\mathbf{t}) \in \Omega$

en la optimalidad

$$\mathbf{H}[\mathbf{x}^*(\mathbf{t}); \mathbf{p}^*(\mathbf{t}); \mathbf{u}^*(\mathbf{t})] = \max_{\mathbf{u} \in \Omega} \mathbf{H}[\mathbf{x}^*(\mathbf{t}); \mathbf{p}^*(\mathbf{t}); \mathbf{u}^*(\mathbf{t})] \equiv \mathbf{c} \quad (4)$$

donde Ω es el conjunto de todos los controladores admisibles, \mathbf{H} debe tener primera derivada, que asegure el máximo, además la condición (4) garantiza estabilidad exponencial, y al llegar a la optimalidad se comporta como una constante; de lo contrario no habrá convergencia y tampoco control óptimo.

Estas condiciones forman parte del método completo propuesto por Pontryagin [11] y Pallu [13], el cual se analizará a continuación.

Principio del Máximo de Pontryagin

El Máximo Principio de Pontryagin nos proporciona las condiciones necesarias para poder obtener una ley de control óptimo en forma local [13] y global [14] bajo ciertas restricciones para un problema específico, donde las condiciones de primer orden establecen la posibilidad de hallar un control óptimo admisible $\tau(\mathbf{x})$ que minimice la integral de costo que regulará la posición del manipulador, asociado con la transferencia del estado de un punto inicial dado a un punto objetivo especificado $[\mathbf{x}_0(\mathbf{t}), \mathbf{x}_f(\mathbf{T})]$, los cuales pueden ser fijos o libres y los llamados co-estados $\lambda_i(\mathbf{t})$.

Donde su pertinencia ha sido guía para diversas aplicaciones [4], [9], [12], [18], las cuales en un principio fueron empleadas para sistemas lineales, digitales y sistemas continuos a trozos [10], [17]; a continuación se enuncia esta técnica en una serie de pasos a definir.

Dado un índice de costo dado en (5), sujeto a un intervalo $[\mathbf{x}_0(\mathbf{t}), \mathbf{x}_f(\mathbf{T})]$ inicial y final fijos lo que para nuestro caso:

$$\mathbf{J} = \int_0^T \mathbf{L}(\mathbf{x}, \tau) dt \quad (5)$$

Paso 1. Coloca la derivada del índice de desempeño y el sistema dinámico en variables de estado en la forma del seudo Hamiltoniano.

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) = \lambda^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (6)$$

donde λ es el vector Lagrangeano o co-estado, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ es el sistema dinámico en variables de estado y $\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ es la derivada del índice de desempeño.

Paso 2. Resolver la derivada parcial de la ecuación (6) con respecto a \mathbf{u} y posteriormente igualarla a cero para obtener la relación de la entrada óptima, denotada en (7).

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \lambda, t) \quad (7)$$

Paso 3. Sustituir la entrada de control (7) dentro del seudo Hamiltoniano \mathbf{H} (6), para dejar a \mathbf{H} en función de las variables de estado \mathbf{x} , los co-estados λ y el tiempo:

$$\mathbf{H}^0(\mathbf{x}, \lambda, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0, \lambda, t) \quad (8)$$

Paso 4. Resolver (8) de acuerdo a las ecuaciones canónicas (1) y (2) de óptimalidad:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{H}^0(\mathbf{x}, \lambda, t)}{\partial \lambda} \quad (9)$$

$$\dot{\lambda} = - \frac{\partial \mathbf{H}^0(\mathbf{x}, \lambda, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (10)$$

bajo las condiciones de frontera $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$.

Paso 5. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de forma analítica o recursiva para después sustituir las soluciones de $\mathbf{x}(t)$ y $\lambda(t)$ del paso 4 en la entrada óptima (7), entonces obtenemos el control óptimo $\mathbf{u}(t)$ para una trayectoria dada en un sistema dinámico.

Dinámica del brazo robot

Antes de continuar, es importante analizar las características principales de la dinámica de un robot manipulador rígido de n-eslabones, representada en variables de estado, la cual denota la forma en que las

articulaciones del mismo evolucionan al aparecer torques aplicados por los actuadores o de alguna fuerza externa aplicada al manipulador [5], [16], [18] y puede ser representado de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \tau) = \tau \quad (11)$$

donde \mathbf{q} es el vector $n \times 1$ de coordenadas generalizadas de articulación que describen la posición del manipulador, $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector $n \times 1$ de velocidades de articulación, $\ddot{\mathbf{q}}$ es el vector $n \times 1$ de aceleraciones de articulación, τ es el vector $n \times 1$ de torques de entrada, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es la matriz simétrica de articulación-espacio $n \times n$ de inercias definida positiva, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la matriz $n \times n$ que describe los efectos de Coriolis y fuerzas centrípetas donde los torques de la fuerza centrípeta son proporcionales a $\dot{\mathbf{q}}^2$ mientras que los torques de Coriolis son proporcionales a $\dot{\mathbf{q}}_i \dot{\mathbf{q}}_j$, $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ es el vector $n \times 1$ gravitacional de torques obtenido como el gradiente de energía potencia del robot debido a la gravedad y finalmente $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \tau)$ describe la fricción viscosa y de Coulomb en relación a las coordenadas generalizadas.

Donde reviste gran interés los valores que tomen, la fuerzas de Coriolis, centrípetas $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y las fricciones $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \tau)$ por ser de naturaleza no lineal.

CONTROL ÓPTIMO DE POSICIÓN

Específicamente se busca un control $\tau(\mathbf{x})$ que minimice la integral de costo cuando el punto inicial y final son fijos.

Retomando el modelo dinámico del robot (11), el cual lo podemos representar en la forma de un sistema de lazo cerrado en variables de estado, podemos obtener:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\tau - \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \tau)] \end{bmatrix} \quad (12)$$

Se propone el siguiente control *tanh-D* [8], de tal forma que restrinja al robot manipulador a generar trayectorias que no importando el tiempo empleado llegue a su objetivo.

Las siguientes características del índice de desempeño son:

$$\mathbf{J} = \int_0^t \left\{ (\sqrt{\ln \cosh(\mathbf{q})^T \mathbf{K}_p \ln \cosh(\mathbf{q})} + \tau^T \mathbf{I} \tau + \mathbf{G}^T \mathbf{I} \mathbf{G}) \right\} dt \quad (13)$$

donde K_p es la ganancia proporcional y es una matriz diagonal, $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la ganancia derivativa, también es una matriz diagonal, $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el error de posición, $\lambda \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es el torque o restricciones aplicados al robot y $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

El *Hamiltoniano* para nuestro problema de control óptimo esta dado como sigue:

$$\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \tau) = \lambda^T \left[\begin{array}{c} -\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\tau - \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}, \tau)] \end{array} \right] + j \quad (14)$$

donde λ es el co-estado del sistema a resolver.

Para obtener la entrada óptima τ^o hacemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \tau^o)}{\partial \tau} &= \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \lambda + 2\tau^o \\ \frac{\partial \mathcal{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \tau^o)}{\partial \tau} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

por lo tanto

$$\tau^o = -\frac{\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \lambda}{2} \quad (16)$$

sustituyendo la ecuación (16) en (14), y derivado parcialmente de acuerdo a las ecuaciones canónicas (9) y (10) obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) \\ \lambda_1 - 2\mathbf{K}_v \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde (12) representa el sistema de ecuaciones para $\dot{\mathbf{x}}(\cdot)$ y (17) para $\dot{\lambda}(\cdot)$.

Finalmente resolviendo el sistema de ecuaciones

tenemos el estado $\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T$ y los co-estados $\lambda_i(\mathbf{t})$ que satisface las dos ecuaciones canónicas (12) y (17) y sustituyendo en (16) hallamos nuestro controlador de posición óptimo para robot manipulador.

Condiciones necesarias para el método del disparo

Por la dificultad de poder hallar los valores del control *tanh-D* óptimo de posición propuesto, en forma analítica, es necesario aplicar un método recursivo [1], [3], [17] que nos pueda facilitar la obtención del controlador, para esto, se emplea la técnica del disparo [6], que emplea como base un *Rung-Kutta* de 4° orden, y por sus características propias tiene la desventaja de que es necesario conocer o adivinar las posibles trayectorias, además de que es fácil caer en divergencias, si no se tienen bien definidos los puntos inicial y final.

Para hacer posible su aplicación, primero se busca dentro de las ecuaciones canónicas (12) y (17), la estructura más completa que pueda se capaz dejar independiente algún co-estado λ en (17).

Esto se puede lograr colocando dentro del índice de desempeño [15] un término de diferencia cuadrática que involucre tanto a la gravedad como al torque, en este caso es $\lambda^T \mathbf{I} \lambda - 2\lambda \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{I} \mathbf{G}$ que garantiza la independencia de los co-estados en (17), evitando divergencias.

Tenemos entonces un nuevo índice de desempeño

$$\mathbf{J} = \int_0^t \left\{ (\sqrt{\ln \cosh(\mathbf{q})^T \mathbf{K}_p \ln \cosh(\mathbf{q})} + \tau^T \mathbf{I} \tau + \mathbf{G}^T \mathbf{I} \mathbf{G} - 2\mathbf{G}^T \mathbf{I} \tau + \dot{\mathbf{q}} \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{q}}) \right\} dt \quad (18)$$

por lo tanto, realizando los pasos del 1 al 4 del método tenemos el nuevo sistema de ecuaciones para

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_p \tanh(\tilde{\mathbf{q}}) \\ \lambda_1 - 2\mathbf{K}_v \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

donde se puede observa que λ_1 es independiente, por tanto, podemos obtener la solución de los sistemas (12) y (17) con la seguridad de convergencia, además de que se conoce a priori la trayectoria del controlador *tan-D*, se pueden denotar puntos iniciales y finales confiadamente.

EJEMPLO DE APLICACIÓN

El controlador *tanh-D* en forma de control óptimo de posición y las condiciones de diseño fueron aplicadas a un robot planar [8], que tiene el siguiente modelo matemático en variables de estado (20).

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(q_1) \\ g(q_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

donde τ_j es el torque aplicando en la *i-th* articulación, $m_{i,j}$ es la masa de la *i-th* y *j-th* articulación del robot planar, la cual es definida positiva, $c_{i,j}$ representa el efecto *Coriollis*, existente entre las articulaciones $g(q_i)$, es la presencia de gravedad y f_i son las fuerzas de fricción y *Coulomb* presentes; los parámetros del robot son dados en la tabla 1.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \lambda_{1q_1} \\ \lambda_{1q_2} \\ \lambda_{2q_1} \\ \lambda_{2q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^{-1} & m_{12}^{-1} \\ m_{21}^{-1} & m_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m_{11}^{-1}}{2} & \frac{m_{12}^{-1}}{2} \\ \frac{m_{21}^{-1}}{2} & \frac{m_{22}^{-1}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{2q_1} \\ \lambda_{2q_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -\dot{q}_1 \\ -\dot{q}_2 \end{matrix} \begin{matrix} -Kp_1 \tanh(\tilde{q}_1) \\ -Kp_2 \tanh(\tilde{q}_2) \\ \lambda_{1q_1} - 2Kv_1 \dot{q}_1 \\ \lambda_{1q_2} - 2Kv_2 \dot{q}_2 \end{matrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(q_1) \\ g(q_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Las relaciones de los elementos de la matriz de Coriollis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, de la matriz de gravedad $G(\mathbf{q})$ y de las fricciones viscosas y de Coulomb $F(\dot{\mathbf{q}}, \tau)$ se enuncian en la tabla 2.

Aplicando las ecuaciones canónicas (12) y (17) en el modelo matemático en variables de estado del robot manipulador planar (20), obtenemos (21) dada al principio de la página siguiente, podemos ahora introducirlo al algoritmo de disparo, con la finalidad de hallar la trayectoria que provoca el control óptimo de posición *tanh-D* sobre cada articulación del robot.

Tabla 1 Parámetros del manipulador.

	Notación	Valor	Unidad
Longitud eslabón 1	l_1	0.25	m
Longitud eslabón 2	l_2	0.16	m
Centro de Gravedad eslabón 1	l_{c1}	0.20	m
Centro de Gravedad eslabón 2	l_{c2}	0.14	m
Masa eslabón 1	m_1	9.5	kg
Masa eslabón 2	m_2	5.0	kg
Inercia eslabón 1	I_1	4.3×10^{-3}	Kg.m ²
Inercia eslabón 2	I_2	6.1×10^{-3}	Kg.m ²
Aceleración de la Gravedad	g	9.8	m/s ²

Tabla 2 Relaciones entre elementos.

$c_{11} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2$
$c_{12} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$
$c_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1$
$c_{22} = 0$
$c_{11} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2$
$c_{12} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$
$g_1(q) = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$
$g_2(q) = m_2 l_{c2} g \sin(q_2) \dot{q}_1$
$f_1 = 0.569$ si $\dot{q}_1 > 0$ ó -0.395 si $\dot{q}_2 < 0$ ó 0 si $\dot{q}_1 = 0$
$f_2 = 0.141$ si $\dot{q}_2 > 0$ ó -0.007 si $\dot{q}_2 < 0$ ó 0 si $\dot{q}_1 = 0$

Simulando el algoritmo recursivo en MatLab 6.5© para un intervalo dado por $\mathbf{x}_{0,1}(0)$ y $\mathbf{x}_{f1}(\mathbf{T}) = 90^\circ$ para el primer eslabón y $\mathbf{x}_{0,2}(0) = \mathbf{x}_{f2}(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$ en el eslabón dos, se obtienen las curvas comparativas de las posibles trayectorias óptimas, en los errores de posición $\tilde{\mathbf{q}}_1$ y $\tilde{\mathbf{q}}_2$ dentro del intervalo 0-1 segundos y de 0-5 segundos para diferentes valores de K_p y K_v , (véase figuras 1, 2, 3 y 4).

Por primera instancia el análisis de los resultados partirá con el peor caso dado en las figuras 2 y 4 (K_{p2} y K_{v2}), donde la variación en los valores de las constantes representan las desviaciones en la trayectoria, que son ocasionada por las cargas o por alguna colisión, que pueda recibir el robot manipulador en el extremo superior, pero a pesar de esto no se pierde el objetivo y es capaz de llegar al punto deseado; esto es importante porque el controlador *tanh-D* óptimo de posición da muestra que posee un grado importante de insensibilidad ante perturbaciones externas.

De acuerdo a las curvas de comportamiento desarrolladas y las restricciones dadas, se nota aquí que el controlador es capaz de generar todas trayectorias posibles para diferentes valores de K_p y K_v y en todos los casos llevar al robot manipulador al punto deseado; este comportamiento es importante debido a que la versión del controlador *tanh-D* óptimo de posición se comporta como tal al demostrar que tiene la habilidad de generar trayectorias de posición, de tal manera que todas convergen de forma asintóticamente estable a la posición deseada.

Aunque el objetivo principal de este artículo no es el determinar la “mejor” trayectoria de posición óptima para el robot manipulador en cuestión, se hacen observaciones interesantes para la familia de trayectorias óptimas de posición generadas vía método recursivo del disparo, enfatizando la existencia de la “mejor” trayectoria, por lo que en las figuras 1, 2, 3, y 4 se nota que para todas las constantes existe una menor variación en sus trayectorias dentro del intervalo de 0-1 segundos; esto es importante porque denota que aquí se halla la región de mayor convergencia, también para figuras 1a y 3a (gráficos de K_{p1} y K_{v1}), como ya se mencionó, se observa que, al aplicarle una variación considerable a los valores de las constantes (K_{p1} y K_{v1}), produce muy pocos cambios en la trayectoria del eslabón 1, facilitando la sintonización con el eslabón dos (K_{p2} y K_{v2}), donde la situación es diferente, cuyos gráficos (figuras 2a y 4a) sólo ha acotado (por medio de flechas) la región donde se da la convergencia más rápida en tiempo y, por ende, el espacio de mayor atracción al punto deseado, con miras de encontrar la “mejor” trayectoria de posición óptima.

Por todo lo anterior, las condiciones impuestas en la aplicación del método recursivo del disparo en el diseño del controlador *tanh-D* óptimo de posición hacen necesario notar aquí que las condiciones desarrolladas en el presente artículo son suficientes para poder emplearlas en la solución de las ecuaciones canónicas de óptimalidad (9) y (10), para la generación de una familia de trayectorias óptimas y después de realizar la sintonización de las constantes se halla la “mejor” trayectoria óptima de posición que satisface las restricciones impuestas; lo anterior es importante, porque le dan el sustento matemático a la metodología propuesta y abre camino a una nueva familia de controladores de óptimos de posición vía método recursivo del disparo.

Por todo lo anterior, las condiciones impuestas en la aplicación del método recursivo del disparo en el diseño del controlador *tanh-D* óptimo de posición hacen necesario notar aquí que las condiciones desarrolladas en el presente artículo son suficientes para poder emplearlas en la solución de las ecuaciones canónicas de óptimalidad (9) y (10), para la generación de una familia de trayectorias óptimas y, después de realizar la sintonización de las constantes, se halla la “mejor” trayectoria óptima de posición que satisface las restricciones impuestas; lo anterior es importante, porque le dan el sustento matemático a la metodología propuesta y abre camino a una nueva familia de controladores de óptimos de posición vía método recursivo del disparo.

Por último, aunque no se ha realizado un análisis completo en relación a la robustez del controlador, se considera que lo mostrado es suficiente para fundamentar la fiabilidad de la generación de trayectorias asintóticas estables versión controlador *tanh-D* óptimo de posición.

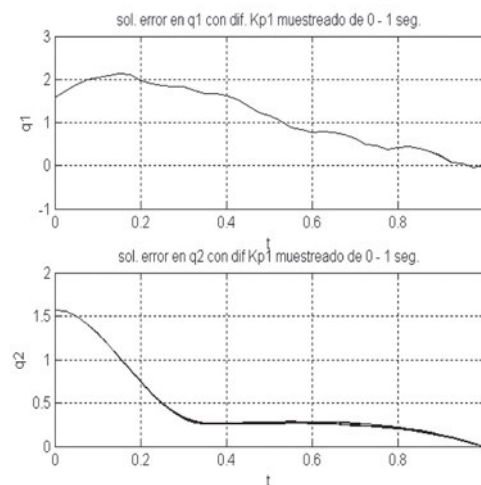


Fig. 1a Trayectoria del control óptimo de posición para $\tilde{\mathbf{q}}_1$ y $\tilde{\mathbf{q}}_2$ muestreados a 0-1 segundos con valores diferentes de K_{p1} .

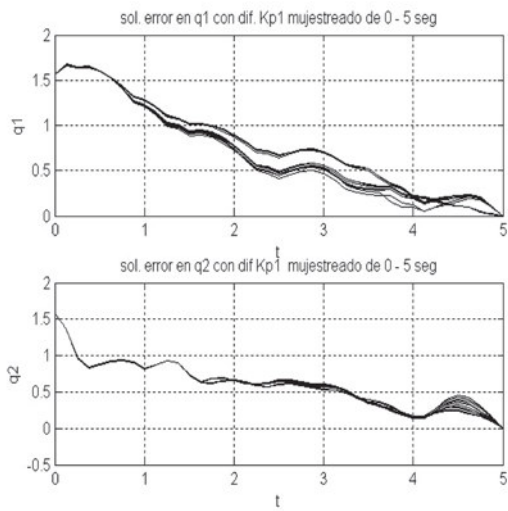


Fig. 1b Trayectoria del control óptimo de posición para \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 muestreados a 0-5 segundos con valores diferentes de K_{p1} .

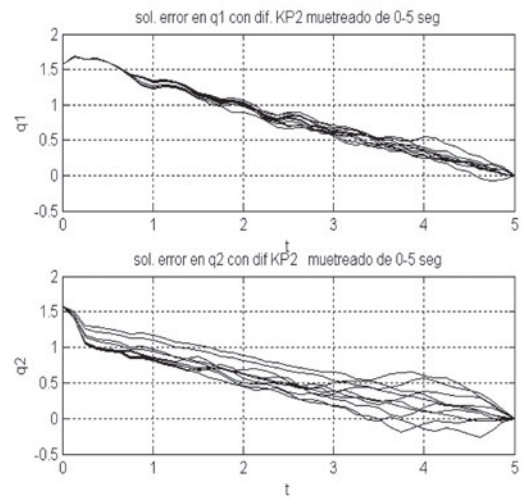


Fig. 2b Trayectoria del control óptimo de posición para \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 muestreados a 0-5 segundos con valores diferentes de K_{p2} .

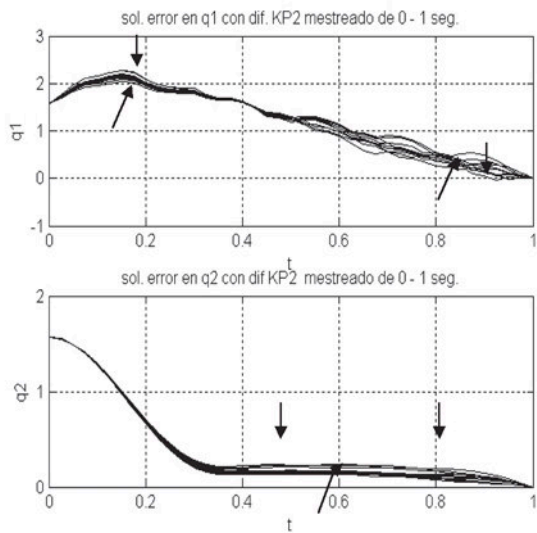


Fig. 2a Trayectoria del control óptimo de posición para \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 muestreados a 0-1 segundos con valores diferentes de K_{p2} .

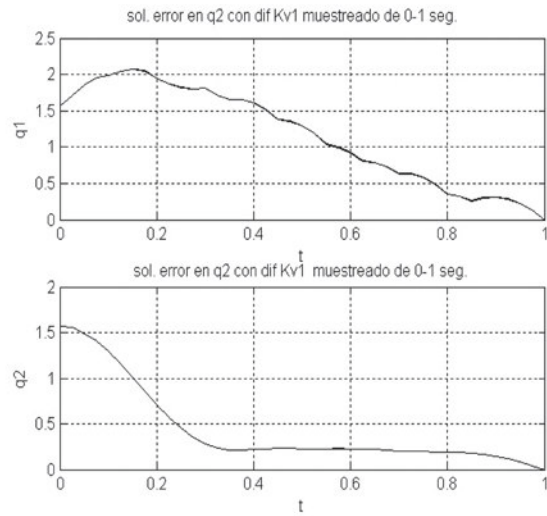


Fig. 3a Trayectorias del control óptimo de posición para \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 muestreados a 0-1 segundos con valores diferentes de K_{v1} .

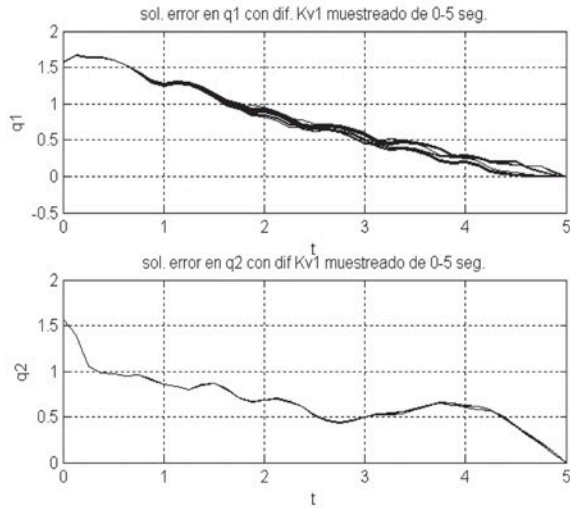


Fig. 3b Trayectoria del control óptimo de posición para \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 muestreados a 0-5 segundos con valores diferentes de K_{v1} .

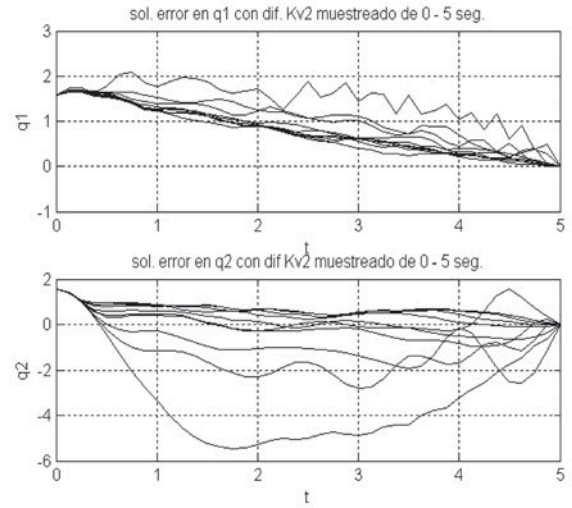


Fig. 4b Trayectoria del control óptimo de posición para \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 muestreados 0-5 segundos con valores diferentes de K_{v2} .

CONCLUSIONES

En este artículo se introdujeron las condiciones necesarias para aplicar el método recursivo del disparo en el diseño de un controlador óptimo de posición en un robot manipulador tipo planar, obtenido vía Máximo Principio de Pontryagin; llevándose a cabo por medio de un análisis exhaustivo de las características propias del modelo dinámico de un robot manipulador rígido de n-eslabones al aplicarle del Máximo Principio para punto inicial y final fijos; pudiéndose hallar una manera de hacer independiente un co-estado (λ), por medio de la introducción de un factor diferencial cuadrático en el índice de desempeño, que a la postre representa la condición mas importante para el empleo del método recursivo del disparo; dando como resultado la realización de todas las curvas posibles bajo las restricciones impuestas, así como la determinación de una región de máxima convergencia dentro de la cual se halla la “mejor” trayectoria óptima de posición, comprobando que el controlador $\tan-D$ óptimo de posición bajo estas restricciones lleva a todas las trayectorias posibles a converger de una forma asintóticamente estables, aun cuando ésta recibe perturbaciones externas en su efector final; todo este análisis le da el respaldo necesario a la metodología propuesta.

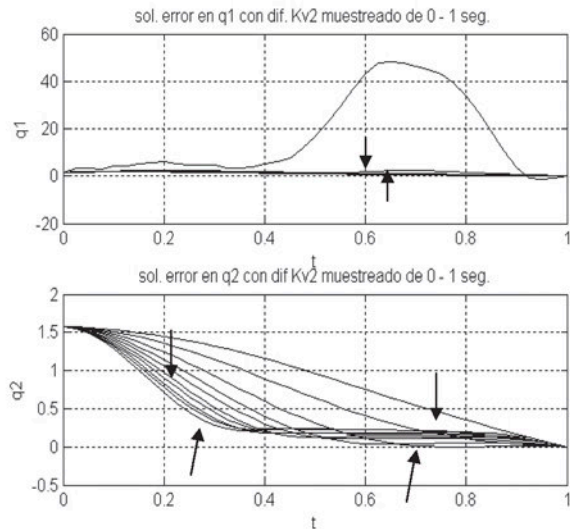


Fig. 4a Trayectoria del control óptimo de posición para \tilde{q}_1 y \tilde{q}_2 muestreados a 0-1 segundos con valores diferentes de K_{v2} .

Haciendo notar que esta metodología forma parte de una nueva familia de controladores óptimos de posición vía método recursivo del disparo, cuyo desarrollo ha sido parte de un proyecto financiado por CosNet, al que le agradezco todo su apoyo.

Este método abre el camino a futuras investigaciones, acerca de la aplicación de otras estrategias de control con diferentes restricciones, que puedan funcionar en los diversos tipos de robot manipulador para una tarea específica.

Cabe señalar que la robustez y el análisis para otras aplicaciones del método de control deberán ser analizadas en futuros proyectos.

REFERENCIAS

- [1] C.W.J. Hol, L.G. Van Willigenburg, E.J. Van Henten and G. Van Straten. "A new optimization algorithm for singular and non-singular digital time-optimal control of robots". Proceedings of the 2001 IEEE. International Conference on Robotics and Automation. May 21-26. 2001.
- [2] M. Dimiktry M. Girinevsky, A.M. Formalsky and A. Yu Schneider. "Force Control of Robotics Systems". CRC press. Germany. 1997.
- [3] J. Moreno Valenzuela. "Time Scaling of Trajectories for point to point robotic tasks". IATED International Conference Circuits, Signals and Systems. Cancun, México, pp 128-133. May 2003.
- [4] J.Y. Fourquet. "Optimal Control Theory and Complexity of the Time Optimal Problem for Rigid Manipulators". IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Yakohama, Japan, pp. 84-90. July 1993.
- [5] J.J. Graig. "Introduction to robotics". Edited by Addison Wesley Longman. Canada. 1989.
- [6] J.H. Mathews and K.D. Fink. "Numerical Methods Using MatLab". Third Edition. Edited by Prentice Hall, Upper Saddle River N.J. 1999.
- [7] J. Angeles. "Fundamentals of Robotics Mechanical Systems". Edited by Springer. Canada. 1997.
- [8] K. Martínez, R. Santibañes and F. Reyes. "A class of adaptive regulator for robot manipulator". International Journal of Adaptive Control and signal Processing. Vol. 12, pp.41-62. 1998.
- [9] L. Shin Yiu and Bor-Sen Chen. "Optimal hybrid position/force tracking control of a constrained robot". International Journal Control. Vol. 58. N° 2, pp. 253-275. 1993.
- [10] P. Benedetto. "A Short Introduction to Optimal Control". Edited by LAC-CNR. 2002.
- [11] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskiy, R.V. Gramkredize and E.F. Mischenko. "The mathematical Theory of Optimal Process". Intercience. New York. 1962.
- [12] P. Coke. "Visual Control of Robots". John Willey and Sons Inc. 1997.
- [13] R. Pallu de la Barriere. "Optimal Control Theory". Edited by Bernard R. Gelbaum. New York, USA. 1980.
- [14] R. Vinter. "Optimal Control. Edited by Birkhauser". 2000.
- [15] F. Reyes, J. Estévez. "Optimal Position Control algorithm considering gravity". Proceedings WSEAS Conferences ASCOMS, TELEINFOR, AEE, MCP and ICAP. Cancún, México. 2004.
- [16] M.W. Spong and M. Vidyasagar. "Robot Dynamics and Control". John Wiley and Sons Ny. 1989.
- [17] T.L. Vincent and W.J. Grnthem. "Nolinear and Optimal Control System". John Wiley & Sons. INC. 1997.
- [18] Z. Lui, H. Ando, S. Hosoe. "Spatial Generalization of Optimal Control for Robots Manipulator". 0-7803-6456-2/00. IEEE. 2000.